Curso de Fundamentos de la Matemática

Curso dictado por Juan Carlos Trujillo
durante el semestre 2018-B en la
Escuela Politécnica Nacional del Ecuador
Notas de clase tomadas y digitalizadas por:
Ximena Sánchez, Patricio Estrada y Marco Molina

Octubre 2018 - Febrero 2019

Índice general

1 Introducción **2**

1.1 Teoría axiomática 2

1.2 Lógica Matemática 3

1.3 Ejercicios 8

1.4 Deducción o Consecuencia Lógica 9

1.5 Reglas de inferencia 10

1.6 Equivalencia Lógica 12

1.7 Ejercicios Propuestos 15

Capítulo 1

Introducción

En este curso abordaremos los siguientes conceptos fundamentales (básicos) de la Matemática: **conjunto**, **número**, **función**, **infinito**, así como el método de la matemática: el **método axiomático**. En este capítulo introductorio, presentaremos que entenderemos por una *teoría axiomática* y los rudimentos de la Lógica Matemática para desarrollar los conceptos fundamentales de la Matemática a la luz del enfoque axiomático.

1.1 Teoría axiomática

Se concibe una **teoría axiomática matemática** como una colección de:

1. **Conceptos**, que son los objetos de estudio de la teoría; y
2. **Proposiciones** acerca de tales conceptos.

Por su parte, los **conceptos** se organizan en dos categorías:

1. **Primitivos**: no se definen *explícitamente* sino *implícitamente* en un sentido que se indicará en breve; y
2. **Definidos**: se definen *única y exclusivamente* mediante los conceptos primitivos.

A su vez, las **proposiciones** también se organizan en dos categorías:

1. **Axiomas**: estas proposiciones se utilizan para definir *implícitamente* los conceptos primitivos; y
2. **Teoremas**: proposiciones que se *deducen* únicamente de los **axiomas**.

Los axiomas no se deducen, los teoremas sí. Indistintamente, se dice que los axiomas y los teoremas son **proposiciones verdaderas**; es decir, la cualidad de "verdadera" de una proposición significa única y exclusivamente que, o bien es un axioma o bien es una proposición que se ha deducido de los axiomas.

Ahora bien, la *deducción* es el mecanismo de la Lógica Matemática para "obtener" proposiciones a partir de los axiomas; las herramientas para ello se denominan **reglas de inferencia** y el proceso mismo, **deducción**.

Para "definir" el concepto de **número real**, vamos a desarrollar una teoría axiomática. Por ello, estudiaremos antes los elementos mínimos de la Lógica Matemática requeridos para un primer desarrollo axiomático de número real.

1.2 Lógica Matemática

Así como la Matemática, la Lógica también se aborda con un lenguaje altamente simbólico; es decir, un lenguaje con signos a los que se atribuye un significado. La *sintaxis* de este lenguaje es el conjunto de reglas para el "manejo" de los signos y la *semántica* es el medio de atribuir significado a esos signos.

El concepto básico para el estudio de la Lógica es el de **proposición**; las ideas intuitivas (poco precisas y difíciles de definir) que tenemos de una proposición es la de *ser un enunciado que o bien debe ser verdadero, o bien falso, pero no ambos*. Tanto las nociones de *enunciado* como de *verdadero* y *falso* son más difíciles de definir que la noción de *proposición*; así que, más bien abordaremos la Lógica también desde un punto de vista axiomático, pero únicamente para dar una precisión a la noción de **proposición** y de **regla de inferencia**.

Empezaremos con la *definición recursiva* de **proposición** (esta definición se ocupa de la sintaxis de este concepto; luego, nos ocuparemos de la semántica).

Para esta definición, suponemos que disponemos de lo siguiente:

(1) Una colección numerable de símbolos

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots$$

a los que denominaremos **proposiciones simples**;

(2) Una colección de cinco símbolos a los que llamaremos **conectivas**:

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \Rightarrow y \Leftrightarrow .$$

Les nombraremos como **negación**, **conjunción**, **disyunción**, **implicación** y **doble implicación**, respectivamente.

(3) Dos símbolos denominados **paréntesis** (con el objeto de agrupar signos):

$$(,\ )$$

DEFINICIÓN 1.1 (**Proposición**)
Se define **proposición** recursivamente de la siguiente manera:

(1) Toda proposición simple es una **proposición**.

(2) Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son proposiciones, entonces también lo son

$$(\neg\mathscr{A}),\quad (\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}),\quad (\mathscr{A}\vee\mathscr{B}),\quad (\mathscr{A}\Rightarrow\mathscr{B})\quad \text{y}\quad (\mathscr{A}\Leftrightarrow\mathscr{B}).$$

Estas proposiciones se denominan, respectivamente: la **negación de** $\mathscr{A}$, la **conjunción** de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$, la **disyunción de** $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$, la **implicación** de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$, y la **doble implicación** de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$.

(3) Las únicas reglas para construir proposiciones son las reglas (1) y (2).

Ejemplos. Los siguientes signos representan proposiciones:

$$P_1 \quad \text{y} \quad P_{200}$$

debido a la primera regla de la definición. En cambio

$$\Rightarrow P_4$$

no es una proposición porque no se obtiene por la aplicación de ninguna de las dos primeras reglas; luego, por la tercera regla, no es una proposición. El signo

$$(P_1 \wedge \neg(P_2 \Rightarrow P_3))$$

sí es una proposición. En efecto, por la primera regla, P_2 y P_3 son proposiciones; por tanto, por la segunda regla, también lo es

$$(P_2 \Rightarrow P_3);$$

luego, una vez más por la segunda regla, también su negación es una proposición:

$$\neg(P_2 \Rightarrow P_3).$$

Finalmente, de aquí y del hecho de que, por la primera regla, P_1 es una proposición, por la segunda regla, también lo es

$$(P_1 \wedge \neg(P_2 \Rightarrow P_3)). \qquad \square$$

Ahora abordemos la **semántica** del concepto de proposición; esto se hará a través del concepto de valor de verdad de una proposición.

Para ello, requerimos antes introducir una notación específica para indicar las proposiciones simples que aparecen o figuran en una proposición. Por ejemplo, si $\mathscr{A}$ representa la proposición

$$(P_3 \Rightarrow \neg P_1) \vee (P_2 \Rightarrow P_1),$$

en $\mathscr{A}$ **aparecen** o **figuran** las proposiciones simples P_1, P_2 y P_3. Para indicar esto, se escribirá así:

$$\mathscr{A}(P_1, P_2, P_3).$$

Si $\mathscr{B}$ representa

$$\neg(P_1 \vee P_2) \Rightarrow (P_1 \wedge (\neg P_3 \wedge P_4)),$$

se escribirá

$$\mathscr{B}(P_1, P_2, P_3, P_4).$$

En general, escribiremos

$$\mathscr{A}(P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}, \ldots, P_{i_n}),$$

donde

$$i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_n,$$

para indicar que las *únicas proposiciones simples* que aparecen en la proposición $\mathscr{A}$ son

$$P_{i_1},\ P_{i_2},\ P_{i_3},\ \ldots,\ P_{i_n}.$$

Ejemplo. Si $\mathscr{A}$ representa la proposición

$$(P_5 \vee P_2) \Rightarrow \neg(P_3 \wedge P_{12}),$$

se escribirá

$$\mathscr{A}(P_2, P_3, P_5, P_{12});$$

es decir, en este caso, tenemos que

$$i_1 = 2, \quad i_2 = 3, \quad i_3 = 5 \quad \text{y} \quad i_4 = 12. \qquad \square$$

La idea que tenemos de valor de verdad es que las proposiciones deben tener siempre uno de dos valores de verdad (comúnmente denominados `verdadero` y `falso`, respectivamente), pero no pueden tener ambos. La primera condición se conoce como el *principio del tercero excluido* y la segunda condición, *principio de no contradicción*. Por ello, vamos a utilizar dos símbolos para representar estos "valores de verdad": `v` y `f`, respectivamente.

Ahora vamos a indicar qué valor de verdad le corresponde a una proposición, dependiendo de los valores de verdad que les corresponda a las proposiciones simples que aparecen en ella. Para esto, es preciso que antes definamos la noción de **asignación de valores de verdad** a las proposiciones simples que aparecen en la proposición. Veamos antes dos ejemplos.

Ejemplos. Si $\mathscr{A}$ representa la proposición

$$P_3 \Rightarrow \neg P_5,$$

escribiremos $\mathscr{A}(P_3, P_5)$ y utilizaremos el par ordenado

$$(\mathtt{v}, \mathtt{f})$$

para indicar que P_3 tiene el valor de verdad `v` (o que estamos asignando a P_3 el valor de verdad `v`) y que P_5 tiene el valor de verdad `f`. Al par ordenado $(\mathtt{v}, \mathtt{f})$ le llamaremos **asignación de valores de verdad** a las proposiciones simples de $\mathscr{A}(P_3, P_5)$.

Si $\mathscr{B}$ representa la proposición

$$((P_2 \Rightarrow P_1) \vee (P_3 \Rightarrow P_1)) \wedge P_2,$$

podremos escribir

$$\mathscr{B}(P_1, P_2, P_3).$$

Luego, la tripleta

$$(\mathtt{f}, \mathtt{v}, \mathtt{f})$$

es una **asignación de valores de verdad** de $\mathscr{B}$, en donde es importante observar que en las dos apariciones de P_1, su valor de verdad será `f` y en las dos aparciones de P_2, su valor de verdad será `v`. $\square$

DEFINICIÓN 1.2 (**Asignación de Valores de Verdad**)
Una **asignación de valores de verdad para las proposiciones simples de la proposición** $\mathscr{A}(P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}, \ldots, P_{i_n})$ es cualquier elemento de $\{\mathtt{v}, \mathtt{f}\}^n$; es decir, cualquier n-upla ordenada

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

donde $x_i \in \{\mathtt{v}, \mathtt{f}\}$ para cada $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Puesto que el conjunto $\{\texttt{v},\texttt{f}\}^n$ tiene 2^n elementos, entonces el número total de asignaciones de valores de verdad para las proposiciones simples de $\mathscr{A}(P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}, \ldots, P_{i_n})$ es 2^n.

Ejemplos.

1. ¿Es la tripleta

$$(\texttt{v},\texttt{v},\texttt{f})$$

una asignación de valores de verdad de las proposiciones que figuran en

$$(P_1 \wedge P_1 \Rightarrow P_2)?$$

No lo es, porque en esta proposición aparecen únicamente dos proposiciones simples: P_1 y P_2; por tanto, por la definición de asignación de valores de verdad, una asignación es un elemento de $\{\texttt{v},\texttt{f}\}^2$, pero $(\texttt{v},\texttt{v},\texttt{f}) \notin \{\texttt{v},\texttt{f}\}^2$.

2. Si $\mathscr{C}$ representa la proposición

$$((P_2 \Leftrightarrow P_5) \vee P_4) \wedge (P_5 \Rightarrow P_2),$$

entonces podemos escribir $\mathscr{C}(P_2, P_4, P_5)$ y la tripleta $(\texttt{f},\texttt{v},\texttt{v})$ sí es una asignación de valores de verdad para las proposiciones simples que aparecen en $\mathscr{C}$, porque $(\texttt{f},\texttt{v},\texttt{v}) \in \{\texttt{v},\texttt{f}\}^3$. De manera más precisa, se asigna el valor de verdad $\texttt{f}$ a la proposición simple P_2, el valor de verdad $\texttt{v}$ a P_4 y $\texttt{v}$ a P_5.

3. Si $\mathscr{B}$ representa la proposición

$$(P_6 \Leftrightarrow P_4) \wedge P_4,$$

¿cuáles son todas las posibles asignaciones de valores de verdad para las proposiciones simples que aparecen en $\mathscr{B}$?

Puesto que en esta proposición aparecen únicamente dos proposiciones simples: P_4 y P_6, podemos escribir $\mathscr{B}(P_4, P_6)$ y los elementos de $\{\texttt{v},\texttt{f}\}^2$ son todas las asignaciones posibles; por tanto, hay en total $2^2 = 4$ asignaciones posibles:

$$(\texttt{v},\texttt{v}), \quad (\texttt{v},\texttt{f}), \quad (\texttt{f},\texttt{v}) \quad \text{y} \quad (\texttt{f},\texttt{f}).$$

4. Si $\mathscr{A}$ representa

$$(P_3 \Rightarrow P_1) \vee (P_1 \wedge P_2),$$

$\mathscr{B}$ la proposición

$$P_3 \Rightarrow P_1$$

y $\mathscr{C}$ la proposición

$$P_1 \wedge P_2,$$

entonces $\mathscr{A}$ es

$$\mathscr{B} \vee \mathscr{C}.$$

Por otra parte,

$$\mathscr{A}(P_1, P_2, P_3), \quad \mathscr{B}(P_1, P_3) \quad \text{y} \quad \mathscr{C}(P_1, P_2).$$

Una asignación de valores de verdad para las proposiciones simples de $\mathscr{A}$ es cualquier tripleta

$$(x_1, x_2, x_3) \in \{\texttt{v},\texttt{f}\}^3;$$

luego, si una tripleta tal es una asignación de valores de verdad de $\mathscr{A}$, la dupla

$$(x_1, x_3)$$

será una asignación de valores de verdad de $\mathscr{B}$ y la dupla

$$(x_1, x_2)$$

será una asignación de valores de verdad de $\mathscr{C}$. $\square$

Sobre la base de estos ejemplos, tenemos que si

$$\mathscr{A}(P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}, \ldots, P_{i_n}),$$

donde

$$i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_n,$$

y $\mathscr{A}$ es la disyunción (o la conjunción, implicación o doble implicación) de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$, de manera que

$$\mathscr{B}(P_{i_{j_1}}, P_{i_{j_2}}, P_{i_{j_3}}, \ldots, P_{i_{jm}}),$$

donde $m \leq n$, y

$$\mathscr{C}(P_{i_{k_1}}, P_{i_{k_2}}, P_{i_{k_3}}, \ldots, P_{i_{k_r}}),$$

donde $r \leq n$, tendremos que

$$\{P_{i_{j_1}}, P_{i_{j_2}}, P_{i_{j_3}}, \ldots, P_{i_{jm}}\} \cup \{P_{i_{k_1}}, P_{i_{k_2}}, P_{i_{k_3}}, \ldots, P_{i_{k_r}}\} = \{P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}, \ldots, P_{i_n}\}.$$

Y, de una asignación de valores de verdad de $\mathscr{A}$, por ejemplo,

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

habrán siempre dos asignaciones de valores de verdad correspondientes para $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$, respectivamente:

$$(x_{l_1}, x_{l_2}, x_{l_3}, \ldots, x_{l_m})$$

y

$$(x_{s_1}, x_{s_2}, x_{s_3}, \ldots, x_{s_r}).$$

Estamos ya listos para definir el valor de verdad de una proposición.

DEFINICIÓN 1.3 (**Valor de verdad de una proposición)**
La definición es recursiva:

1. Si $\mathscr{A}$ es una proposición simple (por ejemplo, P_i), cualquier elemento de $\{\mathtt{v}, \mathtt{f}\}$ es una **asignación de valores de verdad** de $\mathscr{A}$.

2. Si $\mathscr{A}(P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_n})$ representa la proposición $\neg\mathscr{B}(P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_n})$, entonces el **valor de verdad de** $\mathscr{A}$ para una asignación de valores de verdad para las proposiciones simples de $\mathscr{A}$ (que son las mismas que las de $\mathscr{B}$) es:

   (a) `v` si el valor de verdad de $\mathscr{B}$ para esa asignación es `f`; y

   (b) `f` si el valor de verdad de $\mathscr{B}$ para esa asignación es `v`.

3. Si $\mathscr{A}$ representa la proposición $\mathscr{B} \vee \mathscr{C}$, el valor de verdad de $\mathscr{A}$ para una asignación de valores de verdad para las proposiciones simples de $\mathscr{A}$ es `f` únicamente si los valores de verdad de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ para las asignaciones de valores de verdad correspondientes para las proposiciones simples de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ son ambos `f`.

4. Si $\mathscr{A}$ representa $\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}$, el valor de verdad de $\mathscr{A}$, dada una asignación de valores de verdad para $\mathscr{A}$ es `v` si y solo si los valores de verdad de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$, dadas las asignaciones de verdad correspondientes, son ambas `v`.

5. Si $\mathscr{A}$ representa $\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}$, el valor de verdad de $\mathscr{A}$, dada una asignación de valores de verdad para $\mathscr{A}$ es `f` si y solo si los valores de verdad de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$, dadas las asignaciones de verdad correspondientes, son `v` y `f`, respectivamente.

6. Si $\mathscr{A}$ representa $\mathscr{B} \Leftrightarrow \mathscr{C}$, el valor de verdad de $\mathscr{A}$, dada una asignación de valores de verdad para $\mathscr{A}$ es `v` si y solo si los valores de verdad de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$, dadas las asignaciones de verdad correspondientes, son ambas `v` o ambas `f`.

DEFINICIÓN 1.4 (**Tautología**)
Una proposición $\mathscr{A}$ es una **tautología** si y solo si el valor de verdad de $\mathscr{A}$ es `v` para toda asignación de valores de verdad de sus proposiciones simples.

DEFINICIÓN 1.5 (**Contradicción**)
Una proposición $\mathscr{A}$ es una **contradicción** si y solo si el valor de verdad de $\mathscr{A}$ es `f` para toda asignación de valores de verdad de sus proposiciones simples.

1.3 Ejercicios

1. Si $\mathscr{A}$ representa la proposición $\neg P_5$, ¿cuáles son todas las posibles asignaciones de valores de verdad de $\mathscr{A}$?

2. Si $\mathscr{D}$ representa la proposición $(P_3 \wedge P_2) \Rightarrow (\neg P_5 \vee P_2)$, ¿cuáles son todas las posibles asignaciones de valores de verdad de $\mathscr{D}$?

3. ¿La dupla $(\mathtt{v}, \mathtt{v})$ es una asignación de valores de verdad para las proposiciones simples de $(P_5 \wedge \neg P_3) \Rightarrow P_2$?

4. Si $(\mathtt{f}, \mathtt{f}, \mathtt{v}, \mathtt{v})$ es una asignación de valores de verdad de la proposición

$$(\neg P_1 \wedge \neg P_8) \Leftrightarrow ((P_2 \vee P_1) \vee P_5),$$

   indique la asignación de valor de verdad correspondiente a cada proposición simple.

Una vez que hemos introducido la sintaxis y la semántica del concepto de proposición, ahoras nos ocuparemos de precisar la noción de **deducción**.

1.4 Deducción o Consecuencia Lógica

En primer lugar, la **deducción** es una relación entre proposiciones; esta noción está implícitamente relacionada con la *implicación* en el sentido de que se caracteriza por obtener proposiciones verdaderas (**conclusiones**) a partir de otras proposiciones verdaderas (**premisas**).

DEFINICIÓN 1.6 (**Deducción o Consecuencia Lógica)**
Dadas dos proposiciones P y Q, se dice que Q **se deduce** de P si y solo si la implicación $P \Rightarrow Q$ es una tautología.

En otras palabras, Si Q se deduce de P, para cualquier asignación de valores de verdad que hagan verdadera a P, Q será verdadera para la asignación correspondiente.

Utilizaremos el símbolo

$$P \models Q$$

para indicar que

Q se deduce de P.

Si es el caso que la proposición S se deduce de la conjunción de proposiciones

$$P \wedge Q \wedge R \ldots,$$

escribiremos

$$\begin{array}{c} P \\ Q \\ R \\ \vdots \\ \hline S \end{array}$$

en lugar de

$$P \wedge Q \wedge R \ldots \models S.$$

También se usará la notación

$$P, Q, R, \ldots \models S.$$

Es importante no confundir

$$P \models Q$$

con

$$P \;\Rightarrow Q.$$

La primera es una relación entre las proposiciones P y Q y, sobre todo, **no es una proposición**. La segunda sí es una proposición.

El símbolo $Q \models P$ se leerá también como "Q se infiere de P" o "Q es consecuencia lógica de P" o "Q se colige de P" o "P se obtiene de Q" o "Q se deriva de P".

Ejemplo. La proposición Q se deduce de $(P \Rightarrow Q) \wedge P$. Para probar esto, por la definición de deducción, debemos demostrar que la implicación

$$((P \Rightarrow Q) \wedge P) \;\Rightarrow\; Q$$

es una tautología. Para ello, razonemos por el absurdo; es decir, supongamos que hay una asignación de valores de verdad para P y Q tal que la implicación

$$((P \Rightarrow Q) \wedge P) \ \Rightarrow \ Q$$

es `f`. Luego, por la definición del valor de verdad de una implicación, el antecedente

$$(P \Rightarrow Q) \wedge P$$

debe ser una proposición `v` y el consecuente, Q debe ser `f`.

Ahora bien, como el antecedente es `v` y es una conjunción de dos proposiciones, ambas deben ser `v`; esto significa que P debe ser `v`.

En resumen, P debe ser `v` y Q, `f`; luego, la implicación $P \Rightarrow Q$ debe ser `f` y, por tanto, la conjunción

$$(P \Rightarrow Q) \wedge P$$

debe ser `f`, lo que contradice con el supuesto de que esta conjunción es `v`. Por tanto, podemos afirmar que Q sí se deduce de la proposición $(P \Rightarrow Q) \wedge P$. Así, podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ P \\ \hline \quad Q \end{array}$$

□

1.5 Reglas de inferencia

El desarrollo de una teoría axiomática (luego de haber establecido los conceptos primitivos y los axiomas) consiste en la deducción de "nuevas" proposiciones a partir de los axiomas. Todas la deducciones posibles se pueden reducir a la aplicación de unas pocas deducciones; a estas las denominamos **reglas de inferencias**.

La definición de deducción puede verse ella misma como una regla de inferencia sobre reglas de inferencia, y de allí que enunciemos la **meta regla** de la deducción:

Regla de Inferencia 1 (Metaregla de la deducción)
Si

$$\begin{array}{c} P \\ \hline Q, \end{array}$$

la proposición

$$P \Rightarrow Q$$

es verdadera.

La primera y fundamental regla de inferencia (en sentido estricto) es la siguiente:

Regla de Inferencia 2 (Modus Ponens)

$$\begin{array}{l} P \ \Rightarrow \ Q \\ P \\ \hline \quad Q \end{array}$$

Esta regla se puede leer de la siguiente manera:

de la implicación de P y de Q, y de Q, se deduce (infiere, colige, obtiene, etcétera) Q.

Es otras palabras:

> *si una implicación y su antecedente son proposiciones verdaderas, el consecuente de la implicación también lo es*

Para "probar" la validez de esta regla, debemos demostrar que la implicación cuyo antecedente es la conjunción de las premisas y cuyo consecuente es la conclusión,

$$((P \Rightarrow Q) \land P) \;\Rightarrow\; Q,$$

es una tautología. Esto ya lo hicimos arriba mediante la reducción al absurdo.

Otra regla básica de la deducción es la siguiente:

REGLA DE INFERENCIA 3 (Modus Tollens)

$$\begin{array}{l} P \;\Rightarrow\; Q \\ \neg Q \\ \hline \quad \neg P \end{array}$$

Esta regla se lee así:

> *de la implicación de P y de Q, y de la negación de Q, se deduce (infiere, colige, obtiene, etcétera) la negación de P.*

En otras palabras,

> *si una implicación es verdadera y su consecuente es falso, el antecedente de la implicación también es falso.*

Demostración. Para demostrar la validez de esta regla de inferencia, debemos mostrar que la proposición

$$(P \Rightarrow Q) \land \neg Q) \Rightarrow \neg P$$

es una tautología.

Para ello, razonemos por reducción al absurdo; es decir, supongamos que no lo es; es decir, supongamos que existe una asignación de valores de verdad para P y Q tales que la implicación es `falsa`. Luego, el antecedente $(P \Rightarrow Q) \land \neg Q$ debería ser `verdadero` y $\neg P$ `falsa`; por tanto, P debería ser `verdadera` (por la definición de la negación).

Por otra parte, como esta proposición

$$(P \Rightarrow Q) \land \neg Q$$

debe ser `verdadera` por la definición de conjunción, la implicación $P \Rightarrow Q$ y $\neg Q$ deben tener valor de verdad `verdadero`; ello implica que Q debe ser `falsa`. Pero esto implicaría que la implicación $P \Rightarrow Q$ (que debe ser verdadera, como lo hemos visto), debería ser falsa ya que hemos deducido que P debe ser `v` y Q, `f`.

En otras palabras, bajo el supuesto de que la implicación

$$(P \Rightarrow Q) \land \neg Q) \Rightarrow \neg P$$

no es una implicación, la proposición $P \Rightarrow Q$ sería `v` y `f` al mismo tiempo; lo que no es posible. Por tanto, la proposición

$$(P \Rightarrow Q) \land \neg Q) \Rightarrow \neg P$$

sí es una tautología y, así, podemos asegurar que

la negación de P se sigue de la implicación de P y de Q, y de la negación de Q. $\square$

Las demostraciones de la validez de las siguientes dos reglas son bastante sencillas y se deja a que el lector de estas notas las haga por sí mismo.

REGLA DE INFERENCIA 4 (Introducción de la conjunción)

$$\frac{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}}{P \wedge Q} \qquad \text{y} \qquad \frac{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}}{Q \wedge P}$$

Se lee:

De P y de Q, se deducen las proposiciones $P \wedge Q$ y $Q \wedge P$.

REGLA DE INFERENCIA 5 (Eliminación de la conjunción)

$$\frac{P \wedge Q}{P} \qquad \text{y} \qquad \frac{P \wedge Q}{Q}$$

Se lee así:

De la conjunción $P \wedge Q$, se deducen las proposiciones P y Q.

A continuación se enuncian algunas propiedades sencillas de la "deducción" que deberían ser verificadas por el lector con el fin de adquiera dominio absoluto de la noción.

Propiedades de la deducción. Si P y Q son proposiciones, entonces se verifican las siguientes afirmaciones:

1. *Propiedad reflexiva*: $P \models P$.
2. *Propiedad antisimétrica*: si $P \models Q$ y $Q \models P$, entonces la doble implicación $P \Leftrightarrow Q$ es una tautología.
3. *Propiedad transitiva*: si $P \models Q$ y $Q \models R$, entonces $P \models R$.

Como podremos constatar frecuentemente, estas propiedades y las reglas de inferencia ya enunciadas (y otras que irán presentándose oportunamente) serán las herramientas permanentes para desarrollar los conceptos fundamentales que nos proponemos estudiar: números reales, conjuntos, funciones, etcétera.

1.6 Equivalencia Lógica

Para terminar esta presentación de la Lógica mínima que requerimos para iniciar el estudio de los conceptos básicos, vamos a definir el concepto de equivalencia lógica; además, vamos a enunciar el principio fundamental de su razón de ser.

DEFINICIÓN 1.7 (**Equivalencia Lógica)**
Si P y Q son proposiciones, decimos que P **es equivalente lógicamente a** Q, lo que representaremos por $P \equiv Q$, si y solo si $P \Leftrightarrow Q$ es una tautología.

Dado que la doble implicación de dos proposiciones es verdadera únicamente cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad, que $P \Leftrightarrow Q$ sea una tautología significa que P y Q tendrán siempre el mismo valor de verdad: ambas serán verdaderas o ambas falsas.

Ejemplos. Es fácil verificar la validez de las siguientes equivalencias lógicas:

1. $P \equiv \neg\neg P$.
2. $P \vee Q \equiv \neg P \Rightarrow Q$.
3. $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$. □

Propiedades de la Equivalencia lógica. Es bastante sencillo verificar que la equivalencia lógica satisface las siguientes propiedades:

1. *Propiedad reflexiva*: $P \equiv P$.
2. *Propiedad simétrica*: si $P \equiv Q$, entonces $Q \equiv P$.
3. *Propiedad transitiva*: si $P \equiv Q$ y $Q \equiv R$, entonces $P \equiv R$.
4. *Preserva la negación*: $P \equiv Q$ si y solo si $\neg P \equiv \neg Q$.

La razón de ser de las equivalencias lógicas está en el **Principio de sustitución por equivalentes**. Antes de enunciarlo, veamos un ejemplo.

Ejemplo. Supongamos que quisiéramos probar que la proposición

$$(\neg P \wedge (P \vee Q)) \Rightarrow Q \tag{1.1}$$

es una tautología.

Una opción de hacerlo es proceder mediante reducción al absurdo. No obstante, podemos proceder de una manera que aprovecha el saber que otras proposiciones son tautologías.

En efecto, por un lado, sabemos que es válida la equivalencia lógica

$$P \vee Q \equiv \neg P \Rightarrow Q. \tag{1.2}$$

El **principio de sustitución por equivalentes** asegura que si sustituimos la proposición

$$(P \vee Q),$$

que aparece en (1.1), por la proposición equivalente

$$\neg P \Rightarrow Q,$$

la proposición resultante de la sustitución:

$$(\neg P \wedge (\neg P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q \tag{1.3}$$

es lógicamente equivalente a la proposición original; es decir, las proposiciones (1.1) y (1.3) son equivalentes:

$$(\neg P \ \wedge \ (P \ \vee \ Q)) \ \Rightarrow \ Q \quad \equiv \quad (\neg P \ \wedge \ (\neg P \ \Rightarrow \ Q)) \ \Rightarrow \ Q, \tag{1.4}$$

y esta significa que ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

Por tanto, si probáramos que la proposición (1.3) es una tautología, podríamos concluir inmediatamente que la proposición (1.1) también lo sería.

Ahora bien, que la proposición (1.3) es una tautología se deduce inmediatamente por Modus Ponens:

$$\begin{array}{c} \neg P \Rightarrow Q \\ \neg P \\ \hline Q; \end{array}$$

es decir, la proposición

$$(\neg P \ \wedge \ (\neg P \ \Rightarrow \ Q)) \ \Rightarrow \ Q,$$

que no es más que la proposición (1.3), es una tautología. Luego, también lo es la proposición (1.1), como queríamos probar. □

No vamos a probar la validez del principio de sustitución, pero no es difícil "apreciar" su validez:

PRINCIPIO 1 (Sustitución por equivalentes)
Sean $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_n$ proposiciones. Si $\mathscr{A}(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n)$ es una proposición en la que aparecen las proposiciones $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, …, $\mathscr{A}_n$ y si $\mathscr{B}$ es la proposición que se obtiene de $\mathscr{A}$ al sustituir en esta cada $\mathscr{A}_i$ por $\mathscr{B}_i$:

$$\mathscr{B} = \mathscr{A}(\mathscr{B}_i, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_n),$$

entonces

$$\mathscr{A}(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n) \ \equiv \ \mathscr{B}$$

siempre que

$$\mathscr{A}_1 \equiv \mathscr{B}_1, \quad \mathscr{A}_2 \equiv \mathscr{B}_2, \quad \ldots \mathscr{A}_n \equiv \mathscr{B}_n.$$

En el ejemplo, tenemos que $\mathscr{A}$ es

$$(\neg P \ \wedge \ (P \ \vee \ Q)) \ \Rightarrow \ Q$$

y solo una $\mathscr{A}_1$

$$P \ \vee \ Q$$

y una sola $\mathscr{B}_1$:

$$\neg P \Rightarrow Q.$$

Al sustituir $\mathscr{A}_1$ por $\mathscr{B}_1$ en $\mathscr{A}$, obtenemos $\mathscr{B}$:

$$(\neg P \ \wedge \ (\neg P \ \Rightarrow \ Q)) \ \Rightarrow \ Q$$

y, por el **principio de sustitución por equivalentes**, concluimos que

$$\mathscr{A} \ \equiv \ \mathscr{B};$$

es decir, concluimos que

$$(\neg P \ \wedge \ (P \ \vee \ Q)) \ \Rightarrow \ Q \quad \equiv \quad (\neg P \ \wedge \ (\neg P \ \Rightarrow \ Q)) \ \Rightarrow \ Q.$$

como se dijo.

1.7 Ejercicios Propuestos

1. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son siempre verdaderas?

   (a) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

   (b) $(\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \vee P)$

   (c) $(P \vee Q) \Rightarrow P$

2. Si $P \Rightarrow Q$ es una proposición verdadera y es válida la equivalencia $Q \ \equiv \ (R \wedge S)$,

   (a) ¿es verdadera la proposición $P \Rightarrow R$?

   (b) ¿es válido afirmar que $P \Rightarrow Q \ \equiv \ P \Rightarrow R$?

3. Si $P \Rightarrow Q$ es una proposición falsa, ¿es P una proposición verdadera?

4. Si $P \Rightarrow Q$ es una proposición verdadera, ¿es P una proposición falsa?

5. Si $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ es una proposición verdadera, ¿qué valor de verdad debe tener la proposición Q para que la proposición $P \Rightarrow R$ sea verdadera?

6. Si $R \wedge S$ es una proposición verdadera y $P \Rightarrow S$ es falsa, ¿es posible determinar el valor de verdad de R?

7. Determine cuáles de las siguientes expresiones representan equivalencias lógicas válidas:

   (a) $(P \wedge Q) \Rightarrow R \ \equiv \ (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$

   (b) $R \Rightarrow \neg\neg R \ \equiv \ P \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$

   (c) $(P \wedge Q) \Rightarrow R \ \equiv \ P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

   (d) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R \ \equiv \ P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

   (e) $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \ \equiv \ (P \vee Q) \Rightarrow R$