Club de Matemática EPN

Análisis en Espacios de Banach • Ejercicios 03

Espacios Normados

$\aleph_0$

Semestre 2019-A

William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

Ejercicio 1. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios vectoriales normados sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de E, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de F, $a \in E$ y $b \in F$ y $p \in \,]0, +\infty[$. Para $(u, v) \in (E \times F)$ se define

$$\|(u,v)\|_p = \sqrt[p]{\|u\|_E^p + \|v\|_F^p}.$$

Pruebe que

$$\|(u_n, v_n) - (a,b)\|_p \to 0 \quad \text{si y solo si} \quad \|u_n - a\|_E \to 0 \ \text{ y } \ \|v_n - b\|_F \to 0.$$

Demostración. Supongamos que $\|(u_n, v_n) - (a,b)\|_p \to 0$, es decir,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) \left(n > N \Longrightarrow \|(u_n, v_n) - (a,b)\|_p < \varepsilon \right).$$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N$

$$\|(u_n - a, v_n - b)\|_p < \varepsilon,$$

de donde

$$\sqrt[p]{\|u_n - a\|_E^p + \|v_n - b\|_F^p} < \varepsilon,$$

por lo tanto

$$\|u_n - a\|_E^p + \|v_n - b\|_F^p < \varepsilon^p.$$

Ahora, notemos que

$$\|u_n - a\|_E^p \leq \|u_n - a\|_F^p + \|v_n - b\|_y^p$$

y

$$\|v_n - b\|_F^p \leq \|u_n - a\|_E^p + \|v_n - b\|_F^p;$$

por lo tanto, se concluye que

$$\|u_n - a\|_E^p < \varepsilon^p \qquad \text{y} \qquad \|v_n - b\|_F < \varepsilon$$

Con esto, obtenemos que

$$\|u_n - a\|_E \to 0 \qquad \text{y} \qquad \|v_n - b\|_F \to 0.$$

Ahora, demostremos la otra implicación; supongamos que $\|u_n - a\|_E \to 0$ y $\|v_n - b\|_F \to 0$, es decir,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_1 \in \mathbb{N})\,(n > N_1 \Longrightarrow \|u_n - a\|_1 < \varepsilon)$$

y

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_2 \in \mathbb{N})\,(n > N_2 \Longrightarrow \|v_n - b\|_F < \varepsilon)\,.$$

Sea $\varepsilon > 0$, para $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt[p]{2}}$, tenemos que existe N_1 y N_2 tales que para todo $n > N_1$

$$\|u_n - a\|_E^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

y, para todo $n > N_2$

$$\|v_n - b\|_F^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Así, tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, tenemos que para todo $n > N$

$$\|u_n - a\|_E^p + \|v_n - b\|_F^p < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2},$$

de donde

$$\|u_n - a\|_E^p + \|v_n - b\|_F^p < \varepsilon^p,$$

por lo tanto

$$\sqrt[p]{\|u_n - a\|_E^p + \|v_n - b\|_F^p} < \varepsilon,$$

así,

$$\|(u_n, v_n) - (a, b)\|_p < \varepsilon,$$

es decir,

$$(u_n, v_n) \to (a, b). \qquad \square$$