Club de Matemática EPN

Análisis en Espacios de Banach • Ejercicios 04

Espacios Normados

Semestre 2019-A — William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

Ejercicio 1. Sean $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de E y $x, y \in E$. Si

$$x_n \to x \qquad \text{y} \qquad y_n \to y$$

entonces

$$x_n + y_n \to x + y.$$

Demostración. Tenemos que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_1 \in \mathbb{N})\,(n > N_1 \Longrightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon) \tag{1}$$

y

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_2 \in \mathbb{N})\,(n > N_2 \Longrightarrow \|y_n - y\| < \varepsilon)\,. \tag{2}$$

Sea $\varepsilon > 0$, para $\frac{\varepsilon}{2}$ en (1) y (2), existen $N_1 \in \mathbb{N}$ y $N_2 \in \mathbb{N}$ tales que para todo $n > N_1$

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y, para todo $n > N_2$

$$\|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, por la desigualdad triangular, tenemos que para todo $n > N$

$$\|x_n - x + y_n - y\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

con lo cual,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})\,(n > N \Longrightarrow \|(x_n + y_n) - (x + y)\| < \varepsilon)\,;$$

por lo tanto, se tiene el resultado. $\square$

EJERCICIO 2. Sean $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de E, $x \in E$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{K}$ y $a \in \mathbb{K}$. Si

$$a_n \to a \qquad \text{y} \qquad x_n \to x,$$

entonces

$$a_n x_n \to ax.$$

Demostración. Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en $\mathbb{K}$, entonces es acotada, es decir,

$$(\exists M \in \mathbb{K})(\forall n \in \mathbb{N})\left(\|a_n\| \leq M\right).$$

Ahora bien, como ambas sucesiones son convergentes se tiene que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_1 \in \mathbb{N})\left(n > N_1 \Longrightarrow \|a_n - a\| < \varepsilon\right) \tag{3}$$

y

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_2 \in \mathbb{N})\left(n > N_2 \Longrightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon\right). \tag{4}$$

Sea $\varepsilon > 0$, para $\dfrac{\varepsilon}{2|x|}$ en (3) y $\dfrac{\varepsilon}{2M}$ en (4), existen N_1 y N_2 tales que para todo $n > N_1$

$$\|a_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2|x|}$$

y, para $n > N_2$

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Así, tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, se tiene que, para todo $n > N$

$$\begin{aligned}
\|a_n x_n - ax\| &\leq \|a_n x_n - a_n x\| + \|a_n x - ax\| \\
&\leq \|a_n\| \, \|x_n - x\| + |x| \, \|a_n - a\| \\
&\leq M \, \frac{\varepsilon}{2M} + |x| \, \frac{\varepsilon}{2|x|} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2};
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})\left(n > N \Longrightarrow \|a_n x_n - ax\| < \varepsilon\right). \qquad \square$$