# Club de Matemática EPN

## Análisis en Espacios de Banach • Ejercicios 06

### Espacios Normados

$\aleph_0$

Semestre 2019-A William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia ”Análisis Matemático I”, dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

**Ejercicio 1.** Considere $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $(\mathbb{R}, d)$ el espacio métrico de los reales con la norma usual. Definamos, para $x, y \in E$, $\widehat{d}(x,y) = \|x - y\|$ con lo cual $(E, d)$ es un espacio métrico. Pruebe que

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \ E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

es una función continua.

*Demostración.* Probemos que $\|\cdot\|$ es continua en todo punto. Sea $x_0 \in E$, vamos a probar que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(\widehat{d}(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d(\|x\|, \|x_0\|) < \varepsilon\right).$$

Sea $\varepsilon > 0$, sabemos que

$$|\,\|x\| - \|x_0\|\,| \leq \|x - x_0\|,$$

es decir,

$$d\left(\|x\|, \|x_0\|\right) \leq \widehat{d}(x, x_0);$$

por lo tanto, tomando $\delta = \varepsilon$, se tiene que $\|\cdot\|$ es continua en todo punto de $E$. $\square$