CLUB DE MATEMÁTICA EPN

ANÁLISIS EN ESPACIOS MÉTRICOS • EJERCICIOS 05

ESPACIOS MÉTRICOS

$\aleph_0$

Semestre 2019-A — William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

DEFINICIÓN 1

Sean (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$ no vacío. El *diámetro de* A, notado por $\operatorname{diam}(A)$, se define por

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

Se dice que A es *acotado* si $\operatorname{diam}(A) < +\infty$.

EJERCICIO 1. Sean (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$ no vacío. Pruebe que:

a) Si $A \subseteq B$, entonces $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$.

b) $\operatorname{diam}(A) = 0$ si y solo si A tiene un solo elemento.

Demostración.

a) Supongamos que $A \subseteq B$. Sean $x, y \in A$, se tiene que $x, y \in B$, por lo tanto

$$d(x, y) \leq \operatorname{diam}(B),$$

por lo tanto, $\operatorname{diam}(B)$ es una cota superior del conjunto $\{d(x, y) : x, y \in A\}$, y, puesto que el supremo es la menor de las cotas superiores, obtenemos que:

$$\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B).$$

b) Para probar la primera implicación supongamos que $\operatorname{diam}(A) = 0$, vamos a probar que A tiene un solo elemento; esto lo haremos por reducción al absurdo. Supongamos que A tiene más de un punto, por lo tanto, podemos tomar $x, y \in A$ tales que:

$$x \neq y,$$

como d es una métrica se sigue que:

$$d(x,y) > 0.$$

Ahora, notemos que:

$$0 < d(x,y) < \text{diam}(A) = 0,$$

lo cual es contradictorio, por lo tanto, concluimos que A tiene un solo elemento.

Para demostrar la otra implicación, supongamos que A tiene un solo elemento, vamos a demostrar que $\text{diam}(A) = 0$; esto lo haremos por reducción al absurdo. Supongamos que $\text{diam}(A) \neq 0$; es decir,

$$\sup\{d(x,y) : x,y \in A\} \neq 0,$$

así, existen $x, y \in A$ tales que:

$$d(x,y) > 0,$$

pero d es una métrica, por lo tanto, tenemos que:

$$x \neq y,$$

lo cual es contradictorio, debido a que A tiene solo un elemento. Por lo tanto, podemos concluir que:

$$\text{diam}(A) = 0. \qquad \square$$