



Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

DEFINICIÓN 1

Sean (E, d) un espacio métrico y A, B dos subconjuntos no vacíos de E . La *distancia entre A y B* , se define por $d_1(A, B) = \inf\{d(u, v) : u \in A, v \in B\}$

EJERCICIO 1. Sean (E, d) un espacio métrico y A, B dos subconjuntos no vacíos de E . Pruebe que:

- Si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $d_1(A, B) = 0$;
- d_1 no es una métrica en $\mathcal{P}(E)$.

Demostración.

- Supongamos que $A \cap B \neq \emptyset$, así, podemos tomar $x \in A \cap B$ y por tanto la distancia entre A y B viene dada por:

$$d_1(A, B) = \inf\{d(u, v) : u \in A, v \in B\} \leq d(x, x) = 0,$$

de donde

$$d_1(A, B) = 0.$$

- Vamos a probar que d_1 no es una métrica, para ello debemos demostrar que d_1 no cumple con alguna de las 4 propiedades que definen una métrica. En efecto, probemos que d_1 no cumple con la unicidad.

Tomemos $E = \{2, 3, 4\}$, $A = \{2, 3, 4\}$ y $B = \{2\}$ dos subconjuntos de E . Para cada $x, y \in E$ consideremos la métrica dada por:

$$\begin{aligned} d: E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = |x - y|. \end{aligned}$$

Puesto que $A \cap B = \{2\} \neq \emptyset$, por el literal anterior tenemos que:

$$d_1(A, B) = 0.$$

Es decir tenemos que $d_1(A, B) = 0$ a pesar de que $A \neq B$. Así, podemos concluir que d_1 no es una métrica en $\mathcal{P}(E)$. \square