CLUB DE MATEMÁTICA EPN

ANÁLISIS EN ESPACIOS MÉTRCIOS • EJERCICIOS 01

CONCEPTOS TOPOLÓGICOS

$\aleph_0$

Semestre 2019-A William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

EJERCICIO 1. Pruebe que toda bola abierta es un conjunto abierto.

Demostración. Sean (E, d) un espacio métrico, $a \in E$ y $r > 0$. Recordemos que $B(a, r)$ se define como:

$$\{x \in E : d(x, a) < r\}.$$

Vamos a demostrar que $B(a, r)$ es un conjunto abierto, es decir, que todos sus puntos son interiores. Sea $y \in B(a, r)$, por definición de bola abierta, se tiene que

$$d(y, a) < r. \tag{1}$$

Ahora, debemos hallar $R > 0$ tal que

$$B(y, R) \subseteq B(a, r). \tag{2}$$

Tomemos $R = r - d(y, a)$, por (1), tenemos que $R > 0$. Con esto, vamos a probar que (2) se cumple. Sea $z \in B(y, R)$, vamos a demostrar que $z \in B(a, r)$, es decir, vamos a probar que $d(z, a) < r$. Notemos que

$$d(z, y) < R = r - d(y, a),$$

de donde

$$d(z, y) + d(y, a) < r. \tag{3}$$

Utilizando la desigualdad triangular, por tanto se tiene que

$$d(z, a) \leq d(z, y) + d(y, a),$$

por lo que, en (3), tenemos que

$$d(z, a) < r,$$

es decir, $z \in B(a, r)$.

Así, hemos probado que $B(a,R) \subseteq B(a,r)$. Con esto, todo punto de $B(a,r)$ es un punto interior, es decir, $B_r(a)$ es un conjunto abierto. $\square$

EJERCICIO 2. Pruebe que toda bola cerrada es un conjunto cerrado.

Demostración. Sean (E,d) un espacio métrico, $a \in E$ y $r > 0$. Recordemos que $\overline{B}(a,r)$ se define como:

$$\{x \in E : d(x,a) \leq r\}.$$

Vamos a demostrar que $\overline{B}(a,r)^c = \{x \in E : d(x,a) > r\}$ es un conjunto abierto, es decir, que todos sus puntos son interiores. Sea $u \in \overline{B}(a,r)^c$, se tiene que

$$d(u,a) > r. \tag{4}$$

Ahora, debemos hallar $R > 0$ tal que

$$B(u,R) \subseteq \overline{B}(a,r)^c. \tag{5}$$

Tomemos $R = d(u,a) - r$, por (4), tenemos que $R > 0$. Con esto, vamos a probar que(5) se cumple. Sea $v \in B(u,R)$, vamos a verificar que $v \in \overline{B}(a,r)^c$. Notemos que

$$d(v,u) < R = d(u,a) - r$$

de donde

$$r < d(u,a) - d(v,u). \tag{6}$$

Por otro lado, utilizando la desigualdad triangular, se tiene que

$$d(a,u) \leq d(a,v) + d(v,u)$$

de donde

$$d(u,a) - d(v,u) < d(v,a). \tag{7}$$

Por lo que, por (6) y (7), concluimos que

$$r < d(v,a),$$

es decir, $v \in \overline{B}(a,r)^c$.

Por lo tanto, $B(u,R) \subseteq \overline{B}(a,r)^c$, así $\overline{B}(a,r)^c$ es un conjunto abierto y, en consecuencia, $\overline{B}(a,r)$ es un conjunto cerrado. $\square$