CLUB DE MATEMÁTICA EPN

ANÁLISIS EN ESPACIOS MÉTRICOS • EJERCICIOS 04

CONCEPTOS TOPOLÓGICOS

$\aleph_0$

Semestre 2019-A — William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia ”Análisis Matemático I”, dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

EJERCICIO 1. En $\mathbb{R}$ con la métrica usual, pruebe que si $a < b$:

a) $[a, b]$ no es abierto;

b) $[a, b[$ no es cerrado;

c) $\{a\}$ no es abierto;

d) $\{a\}$ es cerrado;

e) $[a, b]$ es cerrado;

f) $]a, b[$ es abierto.

Demostración.

a) Tomemos $A = [a, b]$, es decir,

$$A = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Probemos que a no es punto interior de A. Por el absurdo, supongamos que a es punto interior, es decir, existe $r > 0$ tal que

$$B(a, r) \subseteq A. \tag{1}$$

Notemos que $B(a, r) = \,]a - r, a + r[$. Así, podemos ver $a - \frac{r}{2} \in B(a, r)$, pero $a - \frac{r}{2} \notin A$, lo cual contradice a 1.

Por lo tanto, dado que a es elemento de A pero no un punto interior de A, se tiene que A no es abierto.

b) Tomemos $B = [a, b[$, es decir,

$$B = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

Probemos que $b \in \overline{B}$. Sea $r > 0$, podemos ver que $B(b,r) =]b-r, b+r[$ contiene al menos un punto de B, pues $b - \frac{r}{2} \in B$. Así, se tiene que $b \in \overline{B}$.

Por lo tanto, se tiene que $b \in \overline{B}$, pero $b \notin B$, es decir, $\overline{B} \neq B$ y, en consecuencia, B no es cerrado.

c) Tomemos $C = \{a\}$, es decir,

$$C = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x = a\}.$$

Vamos a probar que a no es punto interior de C. Por el absurdo, supongamos que a es punto interior de C, entonces existe $r > 0$ tal que

$$B(a,r) \subseteq C. \tag{2}$$

Notemos que $B(a,r) =]a-r, a+r[$. Así, podemos ver que $a + \frac{r}{2} \in B(a,r)$, pero $a + \frac{r}{2} \notin C$, pues $a + \frac{r}{2} \neq a$; por lo tanto se contradice a (2).

En consecuencia, dado que a es elemento de C pero no un punto interior de C, se tiene que C no es abierto.

d) Tomemos el conjunto C definido en el literal anterior y probemos que C es cerrado; para esto, vamos a demostrar que C^c es abierto. Notemos que

$$C^c = \{x \in \mathbb{R} : x < a \text{ o } x > a\}.$$

Sea $y \in C^c$, es decir, $y < a$ o $y > a$. Si $y > a$, tomemos $r = y - a > 0$ y probemos que $B(y,r) \subseteq C^c$. Sea $z \in B(y,r)$, es decir,

$$|z - y| < r = y - a$$

de donde,

$$a - y < z - y < y - a,$$

por lo que , $z > a$, es decir, $z \in C^c$. Si $y < a$, tomando $r = a - y > 0$, la demostración es análoga.

Por lo tanto, C^c es abierto y, por ende, C es cerrado.

e) Tomemos $D = [a,b]$, es decir,

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ x \in \mathbb{R} : \left(\frac{a+b}{2} \right) + \left(\frac{a-b}{2} \right) \leq x \leq \left(\frac{b+a}{2} \right) + \left(\frac{b-a}{2} \right) \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R} : -\left(\frac{b-a}{2} \right) \leq x - \left(\frac{a+b}{2} \right) \leq \left(\frac{b-a}{2} \right) \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| x - \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \leq \left(\frac{b-a}{2} \right) \right\} \\
&= \overline{B} \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2} \right).
\end{aligned}
$$

Así, puesto que la bola cerrada es un conjunto cerrado, podemos concluir que $D = [a, b]$ es un conjunto cerrado.

f) Tomemos $E =]a, b[$, es decir,

$$E = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Análogamente al literal anterior, se tiene que

$$E = B \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2} \right).$$

Por lo tanto, como la bola abierta es un conjunto abierto, se tiene que E es un conjunto abierto. $\square$