Semestre 2019-A — William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

DEFINICIÓN 1: Subsucesiones

Sean (E, d) un espacio métrico y s una sucesión de E. Si consideramos $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, una función estrictamente creciente, la composición $s \circ \phi$ se la llama subsucesión de s. Con esto, si denotamos

$$s = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{y} \qquad \phi(k) = n_k,$$

para $k \in \mathbb{N}$, se utilizará la siguiente notación:

$$(s \circ \varphi)(k) = s(\varphi(k)) = x_{\varphi(k)} = x_{n_k}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ y $s \circ \phi = (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (x_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ como la subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EJERCICIO 1. Sean (E, d) un espacio métrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de E y $x \in E$ tal que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Demuestre que toda subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia x.

Demostración. Sea $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, se tiene que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \implies d(x_n, x) < \varepsilon). \tag{1}$$

Para demostrar que $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x, tomemos $\varepsilon_1 > 0$; para $\varepsilon = \varepsilon_1 > 0$ en (1), existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N_1 \implies d(x_n, x) < \varepsilon_1;$$

Ahora, como ϕ es una función estrictamente creciente, se tiene que

$$\phi(k) \geq k,$$

por lo que, si $k > N_1$, se tiene que $\phi(k) > N_1$ y, por lo tanto,

$$d(x_{\phi(k)}, x) < \varepsilon,$$

es decir, $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge hacia x. $\square$