Club de Matemática EPN

Análisis en Espacios Métricos • Ejercicios 02

Sucesiones convergentes, de Cauchy y acotadas

$\aleph_0$

Semestre 2019-A William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

Ejercicio 1. Sean (E,d) un espacio métrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de E y $x \in E$. Demuestre que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y posee una subsucesión convergente a x, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

Demostración. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y que posee una subsucesión $(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x = \lim_{k\to+\infty} x_{\phi(k)}$, vamos a demostrar que $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$.

Dado que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, tenemos que

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon). \tag{1}$$

Por otro lado, ya que $(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x, se tiene que

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(k > N \Longrightarrow d(x_{\phi(k)}, x) < \varepsilon). \tag{2}$$

Ahora, sea $\varepsilon_1 > 0$. Para $\varepsilon_1/2 > 0$ en (1), se tiene que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m > N_1 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Además, para $\varepsilon_1/2 > 0$ en (2), se tiene que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > N_2 \Longrightarrow d(x_{\phi(k)}, x) < \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Con esto, tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, se tiene que si $n > N$, entonces $\phi(n) > N$ y, por lo tanto,

$$d(x_n, x_{\phi(n)}) + d(x_{\phi(n)}, x) < \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2},$$

por lo que, por la desigualdad triangular, tenemos que, para todo $n > N$,

$$d(x_n, x) < \varepsilon_1.$$

Por lo tanto, se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia x. $\square$