$\aleph_0$

Semestre 2019-A William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

EJERCICIO 1. Sean (E, d_E), (F, d_F) dos espacios métricos y $f : E \to F$. Pruebe que f es continua si y solo si para todo conjunto cerrado B en (F, d_F) se tiene que $f^{-1}(B)$ es un conjunto cerrado en (E, d_E).

Demostración. Para la primera implicación, supongamos que f es continua. Sea B un conjunto cerrado en (E, d_E), así B^c es un conjunto abierto. Ahora, puesto que f es continua se tiene que $f^{-1}(B^c)$ es un conjunto abierto en (E, d_E). Por otro lado, dado que

$$f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c,$$

tenemos que $f^{-1}(B)$ es un conjunto cerrado en (E, d_E).

Ahora, para la otra implicación supongamos que para todo conjunto cerrado B en (F, d_F) se tiene que $f^{-1}(B)$ es un conjunto cerrado en (E, d_E). Vamos a probar que f es continua; por la caracterización de continuidad, esto es equivalente a demostrar que para todo A abierto en (F, d_F), se tiene que $f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en (E, d_E).

Sea A un conjunto abierto en (F, d_F), así A^c es un conjunto cerrado en (F, d_F) y, por lo supuesto, $f^{-1}(A^c)$ es un conjunto cerrado en (E, d_E). Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}(A^c)\right)^c &= \left(f^{-1}(A)^c\right)^c \\ &= f^{-1}(A),\end{aligned}$$

por lo tanto, $f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en (E, d_E). Así, hemos probado que f es continua. $\square$

EJERCICIO 2. Sean (E, d_E), (F, d_F) dos espacios métricos, $A \subseteq E$ y $f : E \to F$. Pruebe que si f es continua y A es un conjunto abierto, entonces no necesariamente se tiene que $f(A)$ es un conjunto abierto.

Demostración. Consideremos la función:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2. \end{aligned}$$

Tenemos que f es continua, por otro lado, para todo abierto $A \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que

$$f(A) = \{2\},$$

el cual no es un conjunto abierto en $(\mathbb{R}, d)$. $\square$