Semestre 2019-A Cristian Guachamín – Roque Miño – Luis Pozo

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia ”Análisis Matemático I”, dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2015-B por el profesor Andrés Merino. Los ejercicios fueron elaborados por Cristian Guachamín, Roque Miño y Luis Pozo, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

DEFINICIÓN 1

Sean (E, d) un espacio métrico y $M \subseteq E$ no vacío. Se dice que M *es denso en* E si $\overline{M} = E$.

EJERCICIO 1. Sean (E, d_1) y (F, d_2) espacios métricos, y $f\colon E \to F$ una función continua y sobreyectiva. Demostrar que si A es denso en E, entonces $f(A)$ es denso en F.

Demostración. Demostraremos que $\overline{f(A)} = F$. Como $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$ y $f(A) \subseteq F$ entonces $\overline{f(A)} \subseteq F$. Por otro lado, sea $y \in F$, como f es sobreyectiva, para $y \in F$, existe $x \in E$ tal que $f(x) = y$. Por hipótesis $E = \overline{A}$, entonces $x \in \overline{A}$ es decir existe una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ .Dado que f es continua, entonces se tiene que

$$f(x_n) \to f(x),$$

cuando $n \to \infty$. Por otro lado, $f(x_n) \in f(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(x) = y \in \overline{f(A)}$. □