



Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2015-B por el profesor Andrés Merino. Los ejercicios fueron elaborados por Cristian Guachamín, Roque Miño y Luis Pozo, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

EJERCICIO 1. Dar un ejemplo de una función biyectiva que sea continua pero cuya inversa no lo sea.

Solución 1. Consideremos la función

$$\begin{aligned} I: (\mathbb{R}, d_1) &\longrightarrow (\mathbb{R}, d_2) \\ x &\longmapsto I(x) = x, \end{aligned}$$

donde d_1 es la métrica discreta y d_2 la métrica usual. Esta función es continua y biyectiva, pero su inversa, la cual está dada por

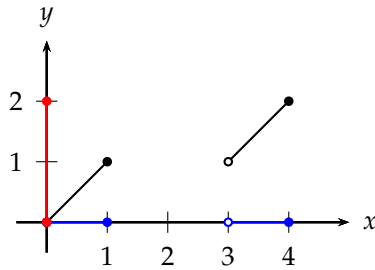
$$\begin{aligned} I^{-1}: (\mathbb{R}, d_2) &\longrightarrow (\mathbb{R}, d_1) \\ x &\longmapsto I^{-1}(x) = x, \end{aligned}$$

no lo es. En efecto, tomemos $x \in (\mathbb{R}, d_1)$, entonces el conjunto $\{x\}$ es un abierto en (\mathbb{R}, d_1) , pero su preimagen $I(\{x\}) = \{x\}$ no es un abierto en (\mathbb{R}, d_2) , por lo tanto I^{-1} no es continua. \square

Solución 2. Tomemos $E = [0, 1] \cup (3, 4]$ y $F = [0, 2]$, ambos con la métrica usual de \mathbb{R} . Consideremos la función

$$\begin{aligned} f: E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1], \\ x - 2 & \text{si } x \in (3, 4]. \end{cases} \end{aligned}$$

Gráficamente, representaremos el espacio E en azul y el espacio F en rojo, y la función la podemos observar en el siguiente gráfico.

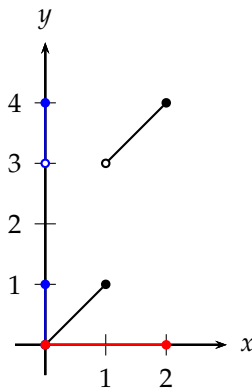


Podemos observar que esta función es biyectiva y continua (se deja los detalles al lector). La inversa de esta función está dada por:

$$f^{-1}: [0, 2] \longrightarrow [0, 1] \cup (3, 4]$$

$$x \longmapsto f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1], \\ x + 2 & \text{si } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Gráficamente, tenemos que:



De donde se sigue que f^{-1} no es continua pues al tomar una vecindad centrada en $x = 1$ podemos observar que $f(x)$ se acerca por la izquierda a 1 y por la derecha a 3. \square