Semestre 2019-A Cristian Guachamín – Roque Miño – Luis Pozo

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2015-B por el profesor Andrés Merino. Los ejercicios fueron elaborados por Cristian Guachamín, Roque Miño y Luis Pozo, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

EJERCICIO 1. Sean (E,τ) y (F,σ) espacios topológicos, y $f\colon E \to F$ una función. Demostrar que f es continua si y solo si para todo $B \subseteq F$,

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Demostración. Sea $B \subseteq F$, se tiene que $B \subseteq \overline{B}$, por lo tanto, $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(\overline{B})$. Como la función es continua, para $\overline{B} \subseteq F$, que es cerrado en F, se tiene que $f^{-1}(\overline{B})$ es cerrado en E, por lo tanto

$$f^{-1}(B) \subseteq \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B}).$$

Recíprocamente, sea B un cerrado de F, debemos demostrar que $f^{-1}(B)$ es un cerrado de E, para lo cual, basta demostrar que $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B)$. Como $\overline{B} \subseteq B$, se tiene que $f^{-1}(\overline{B}) \subseteq f^{-1}(B)$; además, por hipótesis, para $B \subseteq F$, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$, entonces

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B).$$

Así, se tiene que f es continua. □