Club de Matemática EPN

Análisis en Espacios Métricos • Ejercicios 01

Espacios Métricos Completos

Semestre 2019-A

William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

Ejercicio 1. Usando el hecho que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es completo, demuestre que $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$, con $n > 1$, es completo.

Demostración. Antes de empezar, definamos la siguiente notación, si $x \in \mathbb{R}^n$, se tomará

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^n),$$

con $x^1, x^2, \dots, x^n \in \mathbb{R}$. Así, si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}^n$, se tiene que, para cada $k \in \mathbb{N}$, se denota

$$x_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n),$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^n$ y $x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n \in \mathbb{R}$.

Ahora, para demostrar que $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ es un espacio métrico completo consideremos $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$, debemos probar que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente. Sea $\varepsilon > 0$, puesto que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, sabemos existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\max_{1\leq i\leq n} |x_k^i - x_m^i| = d_\infty(x_k, x_m) < \epsilon, \tag{1}$$

para todo $k, m \geq N$. Con esto, para cada $p \in \{1, 2, \dots, n\}$, se sigue que

$$|x_k^p - x_m^p| \leq \max_{1\leq i\leq n} |x_k^i - x_m^i| < \varepsilon,$$

para todo $k, m \geq N$, es decir, para cada $p \in \{1, 2, \dots, n\}$, hemos probado que $(x_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Ahora, como $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es completo, estas sucesiones son convergentes, así, para cada $p \in \{1, 2, \dots, n\}$, existe $x^p \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^p = x^p.$$

Con esto, tomemos

$$x := (x^1, x^2, \dots, x^n),$$

y probemos que
$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x.$$
En efecto, en (1), tomando el límite cuando $m \to +\infty$, para cada $p \in \{1, 2, \dots, n\}$, se sigue que
$$|x_k^p - x^p| \leq \varepsilon,$$
para todo $k \geq N$. Así, tenemos que
$$d_\infty(x_k, x) = \max_{1\leq i\leq n} |x_k^i - x^i| \leq \varepsilon,$$
para todo $k \geq N$; lo cual es equivalente a tener que
$$x = \lim_{k\to+\infty} x_k.$$

Con esto, hemos probado que toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ es convergente, por lo tanto, $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ es un espacio métrico completo. $\square$