Club de Matemática EPN

Análisis en Espacios de Banach • Ejercicios 02

Espacios Métricos Completos

Semestre 2019-A

William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

Ejercicio 1. En (ℓ^∞, d_∞), sea

$$M = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty : (\exists n \in \mathbb{N})(\forall k > n)(x_k = 0)\},$$

pruebe que (M, d_∞) no es completo.

Demostración. Definamos la sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dada por, para $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$x_m^n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \leq m, \\ 0 & \text{si } n > m. \end{cases}$$

Empecemos probando que la sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (M, d_∞). Sea $\varepsilon > 0$, notemos que para $m > n \geq 1$, se tiene que:

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} |x_m^j - x_n^j| = d_\infty(x_m, x_n) = \frac{1}{n+2}. \tag{1}$$

Ahora, puesto que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2} = 0$, sabemos existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon, \tag{2}$$

para todo $n \geq N$. Combinando (1) y (2), se sigue que

$$d_\infty(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

para $m > n \geq N$. Por lo tanto, hemos probado que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (M, d_∞). Ahora, vamos a demostrar que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ no es convergente, por reducción al absurdo supongamos que es convergente en (M, d_∞). Notemos que

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

en (ℓ^∞, d_∞), en efecto, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$d_\infty\left(x_k, \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \left| x_k^j - \frac{1}{j} \right| = \frac{1}{k+2},$$

combinando la igualdad precedente con (2) obtenemos que

$$d_\infty\left(x_k, \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) < \varepsilon,$$

para todo $k \geq N$; es decir, hemos probado que

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Sin embargo, $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \notin M$, en efecto, sabemos que

$$\frac{1}{n+1} > 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$x_n \neq 0,$$

de donde, tenemos que $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \notin M$. Esto no indica que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ no es convergente en (M, d_∞). Así, hemos probado que (M, d_∞) no es un espacio métrico completo. $\square$