CLUB DE MATEMÁTICA EPN

ANÁLISIS EN ESPACIOS DE BANACH • EJERCICIOS 03

ESPACIOS MÉTRICOS COMPLETOS

$\aleph_0$

Semestre 2019-A — William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

EJERCICIO 1. En $\mathbb{N}^*$, consideremos la métrica dada por:

$$\begin{aligned} d\colon\ \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (m,n) &\longmapsto d(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|. \end{aligned}$$

Pruebe que $(\mathbb{N}^*, d)$ es un espacio métrico incompleto.

Demostración. Consideremos la sucesión $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, probaremos que esta sucesión es de Cauchy en $(\mathbb{N}^*, d)$. Sea $\varepsilon > 0$, sabemos que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

de donde, por la definición de límite, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que:

$$\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $n \geq N$. Ahora, para $n, m > N$, se tiene que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

con esto hemos probado que la sucesión $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es de Cauchy en $(\mathbb{N}^*, d)$. Ahora, vamos a demostrar que no converge, por reducción al absurdo supongamos que existe $x \in \mathbb{N}^*$ tal que:

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x) = 0,$$

de donde,

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{x} \right| = 0.$$

Por otro lado, sabemos que $|\cdot|$ es una función continua, así, tenemos que

$$\left| \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{x} \right| = 0,$$

de donde,

$$\left| \frac{1}{x} \right| = 0,$$

lo cual es equivalente a tener que

$$\frac{1}{x} = 0.$$

Esto es contradictorio; por lo tanto, la sucesión $(n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ no converge. Así, tenemos que $(\mathbb{N}^*, d)$ no es completo. $\square$