CLUB DE MATEMÁTICA EPN

ANÁLISIS EN ESPACIOS MÉTRICOS • EJERCICIOS 06

ESPACIOS MÉTRICOS COMPLETOS

Semestre 2019-A — William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

TEOREMA 1

Sean (E, d) un espacio métrico y F un subconjunto no vacío de E.

1. Si (F, d) es un espacio métrico completo entonces F es un conjunto cerrado en (E, d).
2. Si (E, d) es completo y F es un conjunto cerrado en (E, d) entonces (F, d) es completo.

EJERCICIO 1. En $\mathbb{R}$, sean $a < b$. Consideremos el conjunto

$$F = \{f \in \mathcal{C}\,[a, b] : f(a) = f(b)\}.$$

Pruebe que el subespacio (F, d_∞), de $\mathcal{C}\,[a, b]$, es completo.

Demostración. Puesto que $(\mathcal{C}\,[a, b]\,, d_\infty)$ es un espacio métrico completo por el Teorema 1, para probar que (F, d_∞) es completo, basta con demostrar que F es cerrado en $(\mathcal{C}\,[a, b]\,, d_\infty)$.

Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en F y $f \in \mathcal{C}\,[a, b]$ tales que:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f.$$

Vamos a probar que $f \in F$, para esto, probaremos que $f(a) = f(b)$. Por la desigualdad triangular, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$|f(a) - f(b)| \leq |f(a) - f_n(a) + |f_n(a) - f_n(b)| + |f_n(b) - f(b)|.$$

Sabemos que $f_n \in F$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así, $f_n(a) = f_n(b)$, de donde, junto con la desigualdad precedente, se sigue que

$$|f(a) - f(b)| \leq |f(a) - f_n(a)| + |f_n(b) - f(b)|. \tag{1}$$

Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$d_\infty(f_n, f) = \max_{a \leq t \leq b} |f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $n \geq N$. Por la definición de máximo, para todo $t \in [a, b]$, tenemos que:

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $n \geq N$, de donde junto con (1) se sigue que:

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

con esto, hemos probado que

$$f(a) = f(b),$$

así, $f \in F$. Por lo tanto, hemos demostrado que F es un conjunto cerrado en $(\mathcal{C}\,[a, b]\,, d_\infty)$ y, por el Teorema 1, se sigue el resultado. $\square$