Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

Ejercicio 1. Suponga conocido que $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio completo. Pruebe que $(\mathbb{R}^2, d_2)$ es un espacio completo.

Demostración. Sea $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^2$. Vamos a probar que $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, es decir, debemos hallar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} d_2((x_n, y_n), (a, b)) = 0.$$

Para esto, veamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son de Cauchy en $(\mathbb{R}, d)$.

Sea $\varepsilon > 0$, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > N$ se tiene que

$$d_2((x_n, y_n), (x_m, y_m)) < \varepsilon,$$

es decir,

$$\sqrt{|x_n - x_m|^2 + |y_n - y_m|^2} < \varepsilon.$$

Además, notemos que

$$|x_n - x_m|^2 < |x_n - x_m|^2 + |y_n - y_m|^2,$$

de donde

$$|x_n - x_m| < \sqrt{|x_n - x_m|^2 + |y_n - y_m|^2} < \epsilon.$$

y

$$|y_n - y_m| < \sqrt{|x_n - x_m|^2 + |y_n - y_m|^2} < \epsilon,$$

es decir,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad d(y_n, y_m) < \varepsilon,$$

por lo tanto, (x_n) y (y_n) son sucesiones de Cauchy, así, como $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio completo, se tiene que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n - a| = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, a) = 0,$$

y existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \to +\infty} |y_n - b| = \lim_{n \to +\infty} d(y_n, b) = 0.$$

Con ello, vemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} d_2((x_n, y_n), (a, b)) &= \lim_{n \to +\infty} \sqrt{|x_n - a|^2 + |y_n - b|^2} \\
&= \sqrt{\left(\lim_{n \to +\infty} |x_n - a|\right)^2 + \left(\lim_{n \to +\infty} |y_n - b|\right)^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Con esto, hemos demostrado que $(\mathbb{R}^2, d_2)$ es un espacio completo. □

EJERCICIO 2. Suponga conocido que $(\mathbb{R}, d)$ es completo. Pruebe que (ℓ^∞, d_∞) es completo, donde

$$\ell^\infty = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_n) \text{ es acotada}\}$$

y, para $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$,

$$d_\infty(x_n, y_n) = \sup\{|x_k - y_k| : k \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. Primero, definamos la siguiente notación para una sucesión de sucesiones; si $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, se tomará

$$x = (x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots),$$

con $x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots \in \mathbb{R}$. Así, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene la notación

$$x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k, \ldots),$$

donde $x_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y $x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k, \ldots \in \mathbb{R}$.

Probemos que (ℓ^∞, d_∞) es un espacio completo. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en ℓ^∞, vamos a probar que existe $x \in \ell^\infty$ tal que

$$\lim_{m \to \infty} d_\infty(x_m, x) = 0.$$

Sea $\varepsilon > 0$, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > N$,

$$d_\infty(x_n, x_m) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_n^i - x_m^i| < \varepsilon.$$

Notemos que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$|x_n^k - x_m^k| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_n^i - x_m^i| < \varepsilon, \tag{1}$$

para todo $n, m > N$, es decir,

$$d(x_n^k, x_n^k) < \varepsilon,$$

para todo $n, m > N$. Así, para cada $k \in \mathbb{N}$ hemos probado que $\left(x_n^k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}, d)$ y, puesto que $(\mathbb{R}, d)$ es completo, dichas sucesiones son convergentes, así, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $x^k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n^k = x^k.$$

Así, tomemos

$$x = (x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots)$$

y probemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x.

De (1), cuando $m \to +\infty$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$|x_n^k - x^k| < \varepsilon,$$

para todo $m > M$, de donde podemos concluir que

$$d_\infty(x_n, x) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_n^i - x^i| \leq \varepsilon,$$

para todo $n > N$, es decir, se tiene que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x$$

y, en consecuencia, se tiene que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente, por lo tanto (ℓ^∞, d_∞) es un espacio completo. $\square$