CLUB DE MATEMÁTICA EPN

ANÁLISIS EN ESPACIOS MÉTRICOS • EJERCICIOS 01

ISOMORFISMOS

Semestre 2019-A William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia ”Análisis Matemático I”, dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

DEFINICIÓN 1: Espacios métricos isomorfos

Sean (E, d_1) y (F, d_2) dos espacios métricos, se dice que estos espacios son isomorfos si existe $\varphi\colon E \to F$ biyectiva tal que para todo $u, v \in E$

$$d_1(u, v) = d_2(\varphi(u), \varphi(v)).$$

A φ se la llama isometría biyectiva siendo el isomorfismo de ambos espacios métricos.

TEOREMA 1: Completamiento de un espacio métrico

Sea (E, d) un espacio métrico. Existe (F, d_1), un espacio métrico completo, el cual contiene un subconjunto no vacío $\tilde{E}$, denso en (F, d_1), de modo que (E, d) es isomorfo a $(\tilde{E}, d_1)$. Al espacio (F, d_1) se lo llama completamiento o completado de (E, d) y es único, salvo isomorfismos.

EJERCICIO 1. Sea $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ un espacio métrico con la distancia usual dado por el valor absoluto, pruebe que $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ es un espacio métrico incompleto y que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es un completado de $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$.

Demostración. Probemos que $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ es un espacio métrico incompleto. Consideremos la sucesión en $\mathbb{R}$ definida por

$$x_0 = 2$$
$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n},$$

para $n \in \mathbb{N}^*$. Se puede demostrar que esta sucesión es acotada y decreciente, por lo tanto es convergente.

Sea $x \in \mathbb{R}$, el límite de esta sucesión, por lo tanto, se tiene que

$$x = \lim_{n \to +\infty} x_n$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \right) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

de donde se tiene

$$x = \frac{x^2+2}{2x}.$$

Además,

$$x = \frac{x^2+2}{2x} \quad \iff \quad x^2 = 2 \quad \iff \quad x = \sqrt{2}.$$

Así, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, se colige que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, además, se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{Q}$ pero $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, por lo tanto, se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente en $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. En consecuencia, $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ no es un espacio métrico completo.

Ahora, probemos que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es un completado de $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Para ello, verifiquemos que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ posee las propiedades descritas en el Teorema 1; así, recordemos que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es un espacio métrico completo y que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$; por lo tanto basta mostrar que $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ es isomorfo a $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$, es decir, tenemos que hallar una biyección entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}$, lo cual es inmediato bajo la función identidad. $\square$