Club de Matemática EPN

Análisis en Espacios Métricos • Ejercicios 02

Isomorfismos

Semestre 2019-A

William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

Ejercicio 1. Sean $a.b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, tome $E_1 = [0,1]$, $E_2 = [1,3]$ y $E = [a,b]$. Considere el espacio $(E, |\cdot|)$, determine métricas d_1 y d_2 sobre E_1 y E_2, respectivamente, tales que (E_1, d_1) sea isomorfo a $(E, |\cdot|)$ y (E_2, d_2) sea isomorfo a $(E, |\cdot|)$.

Solución.

a) Tomemos la función

$$\begin{aligned} \varphi\colon\ [a,b] &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto \frac{x-a}{b-a}; \end{aligned}$$

la cual es una biyectiva, pues se trata de una función lineal.

Ahora bien, sean $u, v \in [0,1]$, definamos a d_1 como

$$d_1(u,v) = (a-b)|u-v|,$$

que, fácilmente, se demuestra que es una métrica. Así, vemos que para todo $x, y \in [a,b]$ se tiene que

$$\begin{aligned} d_1(\phi(x), \phi(y)) &= (a-b)\left|\frac{x-a}{b-a} - \frac{y-a}{b-a}\right| \\ &= |x-a-y+a| \\ &= |x-y| \\ &= d(x,y), \end{aligned}$$

con lo cual, se tiene que φ es un isomorfismo entre $([a,b], d])$ y $([0,1], d_1)$.

b) Tomemos la función

$$\begin{aligned} \psi\colon\ [a,b] &\longrightarrow [1,3] \\ x &\longmapsto \frac{2}{b-a}(x-a)+1, \end{aligned}$$

que, de igual manera que en el caso anterior, es biyectiva.

Sean $u, v \in [1, 3]$; escribamos la métrica

$$d_2(u, v) = \frac{b-a}{2}|u-v|.$$

Así, se tiene que para todo $x, y \in [a, b]$

$$\begin{aligned}
d_2(\psi(x), \psi(y)) &= \frac{b-a}{2}|\psi(x) - \psi(y)| \\
&= \frac{b-a}{2}\left|\frac{2}{b-a}(x-a) + 1 - \frac{2}{b-a}(y-a) - 1\right| \\
&= |x - a - y + a| \\
&= |x - y| \\
&= d(x, y).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, obtuvimos que ψ es un isomorfismo de los espacios $([a, b]), d$ y $([1, 3], d_2)$. $\square$