Club de Matemática EPN

Análisis en Espacios Métricos • Ejercicios 03

Isomorfismos

Semestre 2019-A

William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

Ejercicio 1. Pruebe que si (E_1, d_1) y (E_2, d_2) son isomorfos, entonces

$$(E_1, d_1) \text{ es completo} \quad \text{si y solo si} \quad (E_2, d_2) \text{ es completo.}$$

Demostración. Sean (E_1, d_1) y (E_2, d_2) dos espacios métricos isomorfos, vamos a demostrar que si (E_1, d_1) es completo, entonces (E_2, d_2) es completo. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E_2, vamos a demostrar que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en E_2.

Puesto que (E_1, d_1) y (E_2, d_2) son isomorfos, existe $\varphi\colon E_1 \to E_2$ biyectiva tal que

$$(\forall u, v \in E_1)(d_1(u, v) = d_2(\varphi(u), \varphi(v))); \tag{1}$$

además, como φ es biyectiva, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un único $x_n \in E_1$ tal que

$$\varphi(x_n) = y_n, \tag{2}$$

con esto, probemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Dado que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, tenemos que

$$(\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n, m > N \Longrightarrow d_2(y_n, y_m) < \varepsilon_1),$$

de donde, por (2), tenemos que

$$(\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n, m > N \Longrightarrow d_2(\varphi(x_n), \varphi(x_m)) < \varepsilon_1).$$

Así, por (1), llegamos a que

$$(\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n, m > N \Longrightarrow d_1(x_n, x_m) < \varepsilon_1),$$

Por lo tanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (E_1, d_1) y, puesto que (E_1, d_1) es un espacio métrico completo, se colige que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, es decir, existe $L_1 \in E_1$ tal que

$$(\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists M \in \mathbb{N})(n > M \Longrightarrow d_1(x_n, L_1) < \varepsilon_2),$$

que, por (1)

$$(\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists M \in \mathbb{N})(n > M \Longrightarrow d_2(\varphi(x_n), \varphi(L_1)) < \varepsilon_2).$$

Así, tomando $L_2 = \varphi(L_1) \in E_2$ y, por (2), llegamos a que

$$(\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists M \in \mathbb{N})(n > M \Longrightarrow d_2(y_n, L_2) < \varepsilon_2).$$

Por lo tanto, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en (E_2, d_2) y, en consecuencia, (E_2, d_2) es un espacio métrico completo.

Análogamente se demuestra la otra implicación. $\square$