Semestre 2019-A William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

Definición 1

Sean $(E, d_1), (F, d_2)$ dos espacios métricos. Una función $\varphi \colon E \to F$ es un **homeomorfismo** si φ es biyectiva y bicontinua, es decir, tanto φ como φ^{-1} son continuas.

Ejercicio 1. Si (E, d_1) y (F, d_2) son dos espacios métricos isomorfos, pruebe que (E, d_1) y (F, d_2) son homeomorfos.

Demostración. Sean (E, d_1) y (F, d_2) dos espacio métricos isomorfos, así, existe $\varphi \colon E \to F$ biyectiva tal que,

$$(\forall x_1, x_2 \in E)(d_1(x_1, x_2) = d_2(\varphi(x_1), \varphi(x_2))). \tag{1}$$

Probemos que φ y φ^{-1} son continuas.

Para probar que φ es continua, debemos demostrar que

$$(\forall x_1 \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_2 \in E)(d_1(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow d_2(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) < \varepsilon).$$

Sea $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$, por (1), tenemos que $d_2(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) < \varepsilon$ y, en efecto, φ es continua.

Ahora, probemos que φ^{-1} es continua. Para esto, notemos que $\varphi^{-1} \colon F \to E$ es biyectiva y, tal que

$$(\forall y_1, y_2 \in F)(d_2(y_1, y_2) = d_1(\varphi^{-1}(y_1), \varphi^{-1}(y_2)));$$

y, de manera análoga, se tiene que φ^{-1} es continua. □

Ejercicio 2. Dé un ejemplo de dos espacios homeomorfos, el uno completo y el otro no.

Solución. Consideremos los espacios $\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, d\right)$ y $(\mathbb{R}, d)$, con d la distancia usual,

de donde sabemos que $\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,d\right)$ es un espacio métrico incompleto y, por otro lado, $(\mathbb{R},d)$ es un espacio métrico completo.
Así, el homeomorfismo es

$$\begin{aligned}\varphi\colon\ \left]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right[&\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \tan(x),\end{aligned}$$

pues φ es biyectiva y, a la vez, bicontinua.

Otro ejemplo, es el homeomorfismo

$$\begin{aligned}\psi\colon\ \mathbb{R} &\longrightarrow\ ]-1,1[\\ x &\longmapsto \frac{x}{|x|+1}.\end{aligned}$$

□