$\aleph_0$

Semestre 2019-A — William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

EJERCICIO 1. Sean (E, d) un espacio métrico y $\widehat{d} = \frac{d}{1+d}$. Pruebe que

$$(E, d) \text{ es completo} \quad \text{si y solo si} \quad (E, \widehat{d}) \text{ es completo.}$$

Demostración. Supongamos que (E, d) es un espacio métrico completo. Vamos a probar que $(E, \widehat{d})$ es un espacio métrico completo.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(E, \widehat{d})$, vamos a probar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente; tenemos que

$$(\forall \varepsilon_0 > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) \left(n, m > N \Longrightarrow \widehat{d}(x_n, x_m) < \varepsilon_0 \right). \tag{1}$$

Sea $\varepsilon > 0$, para $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, en (1), tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > N$

$$\frac{d(x_n, x_m)}{1 + d(x_n, x_m)} < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon},$$

lo que equivale a

$$d(x_n, x_m) + \varepsilon d(x_n, x_m) < \varepsilon + \varepsilon d(x_n, x_m),$$

es decir,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

con lo cual, hemos demostrado que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (E, d) y, como (E, d) es un espacio métrico completo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en (E, d), es decir, existe $L \in E$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, L) = 0,$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to+\infty} \widehat{d}(x_n, L) = \lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n, L)}{1 + d(x_n, L)} = 0$$

y, en consecuencia, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en $(E,\widehat{d})$, por lo que, $(E,\widehat{d})$ es un espacio métrico completo.

Para la otra implicación, la demostración es análoga notando que $d = \dfrac{\widehat{d}}{1-\widehat{d}}$. $\square$