



Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

EJERCICIO 1. Sea (E, d) un espacio métrico. Pruebe que si $T: E \rightarrow E$ es una contracción definida en (E, d) entonces T es continua.

Demostración. Supongamos que T es una contracción, así existe $\alpha \in]0, 1[$ tal que para todo $x, y \in E$ se tiene que:

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

Vamos a probar que T es continua. Sean $a \in E$ y $\varepsilon > 0$, debemos hallar $\delta > 0$ tal que para todo $x \in E$

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(T(x), T(a)) < \varepsilon.$$

Tomemos

$$\delta := \frac{\varepsilon}{\alpha} > 0,$$

de donde

$$d(x, a) < \delta = \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

implica que

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y) < \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon.$$

Con esto, hemos probado que T es continua. □