$\aleph_0$

Semestre 2019-A

Cristian Guachamín – Roque Miño – Luis Pozo

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2015-B por el profesor Andrés Merino. Los ejercicios fueron elaborados por Cristian Guachamín, Roque Miño y Luis Pozo, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

EJERCICIO 1. Sean (E, d) un espacio métrico completo y $f\colon E \to E$ una función. Demostrar que si la función

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{\text{n veces}}$$

es una contracción, entonces f tiene un único punto fijo.

Demostración. Notemos que, gracias al Teorema de Punto Fijo, existe un único $z \in E$ tal que $z = f^n(z)$. Así, evaluando f en este punto, se tiene que

$$f(z) = f(f^n(z)) = f^{n+1}(z) = f^n(f(z)),$$

es decir, $f(z)$ es un punto fijo de f^n. Pero, dado que el punto fijo de f^n es único, se concluye que $f(z) = z$, es decir, f tiene un punto fijo.

Por otro lado, sea $\tilde{z} \in E$ tal que $\tilde{z} = f(\tilde{z})$, evaluando la función de manera reiterada, se tiene que

$$\tilde{z} = f(\tilde{z}) = f(f(\tilde{z})) = \cdots = f^n(\tilde{z}),$$

es decir, $\tilde{z}$ es un punto fijo de f^n. Puesto que f^n tiene un único punto fijo se tiene que $z = \tilde{z}$. Así, se concluye que el punto fijo de f es único. □