Semestre 2019-A — William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

LEMA 1 (Lema de las combinaciones lineales)**.** Sean E un espacio vectorial normado, $n \in \mathbb{N}$ y $v_1, \dots, v_n \in E$, n vectores linealmente independientes. Se tiene que existe $c > 0$ tal que para todo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ se tiene que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \right\| \geq c \left\| \alpha \right\|_1 ,$$

donde:

$$\left\| \alpha \right\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|.$$

EJERCICIO 1. En $\mathbb{R}^2$ considere $v_1 = (1, 1)$ y $v_2 = (1, -1)$. Halle el mayor $c > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{k=1}^{2} \alpha_k v_k \right\| \geq c \left\| \alpha \right\|_1$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}^2$

Solución: Sabemos que $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ es un espacio vectorial normado, además v_1 y v_2 son linealmente independientes, así, por el **Lema de la combinaciones lineales** sabemos existe $c > 0$, para todo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, con $\|\alpha\|_1 = 1$ tal que

$$\|\alpha_1(1, 1) + \alpha_2(1, -1)\|_2 \geq c.$$

Notando que

$$\begin{aligned}\|\alpha_1(1, 1) + \alpha_2(1, -1)\|_2 &= (\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2, \\ &= 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2),\end{aligned}$$

y si consideremos el conjunto:

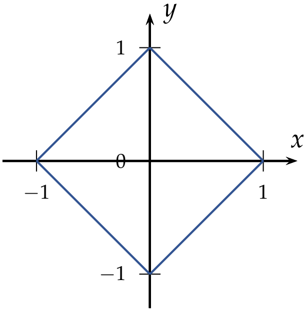
$$A = \{2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) : \alpha \in \mathbb{R}^2, \|\alpha\|_1 = 1\} \subseteq \mathbb{R},$$

tenemos que c es una cota inferior de A, así, debemos buscamos $\inf(A)$

Este problema lo podemos reformular como el siguiente problema de optimización con restricciones:

$$\begin{gathered} \min f(\alpha_1, \alpha_2) = 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \\ \text{sujeto a: } |\alpha_1| + |\alpha_2| = 1. \end{gathered}$$

Para simplificar este problema, analicemos la gráfica de la restricción $|\alpha_1| + |\alpha_2| = 1$:



Por la simetría de la función a optimizar y de la restricción, podemos resolver el problema encontrando la solución de

$$\begin{gathered} \min f(\alpha_1, \alpha_2) = 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \\ \text{sujeto a: } |\alpha_1| + |\alpha_2| = 1. \end{gathered}$$

Para resolver este problema, utilizamos el método de los multiplicadores de Lagrange, para ello definamos el lagrangeano:

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) = 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 - 1),$$

para $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) \in \mathbb{R}^3$. Derivando parcialmente respecto a cada una de las variables e igualamos a 0, con lo cual obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) &= 4\alpha_1 + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) &= 4\alpha_2 + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) &= \alpha_1 + \alpha_2 - 1 = 0m \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema, tenemos que:

$$\alpha_1 = \alpha_1 = \frac{1}{2},$$

con esto, obtenemos que el mínimo es

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{2\left(\frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^2\right)} \\ &= 1. \end{aligned}$$ □