Club de Matemática EPN

Análisis en Espacios de Banach • Ejercicios 02

Espacios Métricos

Semestre 2019-A William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

Teorema 1: Teorema de las Normas Equivalentes.

Si E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\dim(E) = N < +\infty$, entonces todas las normas definidas en E son equivalentes.

Ejercicio 1. Sin usar el Teorema de las Normas Equivalentes pruebe que en $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\|_\infty = \max_{0\leq k\leq n} |x_k|. \end{aligned}$$

son normas equivalentes.

Demostración. Vamos a probar que $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, debemos hallar $c_1, c_2 > 0$ tales que:

$$c_1 \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_\infty .$$

Notemos que para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que:

$$|x_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2,$$

de donde, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que

$$|x_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2},$$

luego, por la definición de máximo, se sigue que

$$\max_{1\leq k\leq n} |x_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2},$$

es decir,
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \,,$$
por lo tanto, podemos tomar $c_1 := 1$.

Ahora, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, nuevamente por la definición de máximo, se tiene que
$$|x_k|^2 \leq \left(\max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \right)^2 = \|x\|_\infty^2 \,,$$
de donde,
$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \leq n \|x\|_\infty{}^2,$$
luego,
$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \leq \sqrt{n} \, \|x\|_\infty \,,$$
es decir,
$$\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \, \|x\|_\infty \,,$$
por lo tanto, podemos tomar $c_2 = \sqrt{n}$.

Por lo tanto, hemos probado que existen $c_1, c_2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tales que
$$c_1 \, \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq c_2 \, \|x\|_\infty \,.$$
Así, hemos demostrado que $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ son normas equivalentes. □

EJERCICIO 2. Pruebe para toda norma en $\mathbb{R}^n$, existen $a, b > 0$ tales que
$$\|x\| \leq b \, \|x\|_2 \qquad \text{y} \qquad a \, \|x\|_2 \leq \|x\| \,.$$
para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Tomemos $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y definamos:
$$M_1 = \max_{1 \leq k \leq n} \|v_k\| \qquad \text{y} \qquad M_2 = \max_{1 \leq k \leq n} \|v_k\|_2 \,. \tag{1}$$
Sean $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tales que
$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k.$$

Por la desigualdad triangular, tenemos que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \| \alpha_k v_k \| ,$$

luego, por la homogeneidad de la norma, obtenemos que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \, \| v_k \| ,$$

combinando la desigualdad precedente con (1) se sigue que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \right\| \leq M_1 \| \alpha \|_1 . \tag{2}$$

Por otro lado, por el Lema de las Combinaciones Lineales, sabemos existe $c_1 > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \right\|_2 \geq c_1 \| \alpha \|_1 ,$$

luego, combinando la desigualdad precedente con (2) obtenemos que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \right\| \leq \frac{M_1}{c_1} \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \right\|_2 .$$

Tomando $b = \frac{M_1}{c_1}$ se sigue que

$$\| x \| \leq b \| x \|_2 .$$

Análogamente, se prueba que tomando $a = \dfrac{c_2}{M_2} > 0$ se cumple que

$$a \| x \|_2 \leq \| x \| ,$$

donde c_2 proviene de aplicar el Lema de las Combinaciones Lineales a la norma $\| \cdot \|$. □

EJERCICIO 3. Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \| x \|_1 \leq \| x \|_2 \leq \| x \|_1 .$$

Demostración. Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, vamos a demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 .$$

Sabemos que

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k| \right)^2 ,$$

de donde

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k| \right) ,$$

es decir

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 .$$

Por otro lado, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, entre $x = (x_2, \ldots, x_n)$ y $y = (1, \ldots, 1)$ tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} |1 \cdot x_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2},$$

de donde.

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 ,$$

es decir,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 .$$

Por lo tanto, hemos probado que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 . \qquad \square$$