Semestre 2019-A — William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

Definición 1: Operador Lineal Acotado

Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios vectoriales normados, ambos sobre el mismo campo. Un operador lineal $T\colon E \to F$ se dice que es acotado si y solo si existe $c > 0$ tal que para todo $x \in E$ se tiene que

$$\|T(x)\|_F \leq c\,\|x\|_E\,.$$

Proposición 1 (Operador Lineal No Acotado)**.** Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios vectoriales normados sobre el mismo campo. Se tiene que un operador lineal $T\colon E \to F$ no es acotado si existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $E \setminus \{0\}$ tal que

$$\left(\frac{\|T(x_n)\|}{\|x_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

no converge.

Ejercicio 1. Pruebe que el operador

$$\begin{aligned} T\colon\ \mathcal{C}^1[a,b] &\longrightarrow \mathcal{C}[a,b] \\ x &\longmapsto x' \end{aligned}$$

es lineal y no acotado (considerando la norma $\|\cdot\|_\infty$ en el espacio de salida y de llegada).

Solución. Veamos que T es lineal; sean $x, y \in \mathcal{C}^1[a,b]$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que

$$T(\alpha x + y) = (\alpha x + y)' = \alpha x' + y' = \alpha T(x) + T(y),$$

por lo tanto, T es lineal.

Ahora, verifiquemos que T no es acotado; para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la función

$$\begin{aligned} x_n\colon\ [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto t^{n+1}, \end{aligned}$$

tenemos que $x_n \in \mathcal{C}^1[a,b]$ y, además,

$$\begin{aligned} T(x_n)\colon\ [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (n+1)t^n, \end{aligned}$$

Con esto, tenemos que

$$\|T(x_n)\|_\infty = \max_{0\le t\le 1} |(n+1)t^n| = (n+1) \max_{0\le t\le 1} |t^{n-1}| = n+1$$

y

$$\|x_n\|_\infty = \max_{0\le t\le 1} |t^{n+1}| = 1,$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\|T(x_n)\|_\infty}{\|x_n\|_\infty} = \lim_{n\to+\infty} n+1 = +\infty,$$

con lo cual, se concluye que el operador T no es acotado. $\square$

EJERCICIO 2. Sea el operador

$$\begin{aligned} T\colon\quad \ell^\infty &\longrightarrow \ell^\infty \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto \left(\frac{x_k - x_{k+1} + x_{k+2}}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}}, \end{aligned}$$

pruebe que es lineal y acotado. Halle $\|T\|$.

Solución. Probemos que T es un operador lineal; sean $(x_n), (y_n) \in \ell^\infty$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces

$$\begin{aligned} T\left(\alpha\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) &= T\left((\alpha x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \\ &= \left(\frac{(\alpha x_k + y_k) - (\alpha x_{k+1} + y_{k+1}) + (\alpha x_{k+2} + y_{k+2})}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}} \\ &= \alpha\, \left(\frac{x_k - x_{k+1} + x_{k+2}}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}} + \left(\frac{y_k - y_{k+1} + y_{k+2}}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}} \\ &= \alpha T\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) + T\left((y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right). \end{aligned}$$

Ahora, veamos que T es acotado; sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ tal que $\left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_\infty = 1$; por otro lado, notemos que $\dfrac{1}{k!} \leq 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, de donde podemos ver que

$$\left\| \left(\frac{x_k}{k!} \right)_{k\in\mathbb{N}} \right\|_\infty \leq 1.$$

Así, obtenemos la siguiente cota para T

$$\begin{aligned}
\left\| T\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \right) \right\|_\infty &= \left\| \left(\frac{x_k - x_{k+1} + x_{k+2}}{k!} \right)_{k\in\mathbb{N}} \right\|_\infty \\
&= \left\| \left(\frac{x_k}{k!} \right)_{k\in\mathbb{N}} - \left(\frac{x_{k+1}}{k!} \right)_{k\in\mathbb{N}} + \left(\frac{x_{k+2}}{k!} \right)_{k\in\mathbb{N}} \right\|_\infty \\
&\leq \left\| \left(\frac{x_k}{k!} \right)_{k\in\mathbb{N}} \right\|_\infty + \left\| \left(\frac{x_{k+1}}{k!} \right)_{k\in\mathbb{N}} \right\|_\infty + \left\| \left(\frac{x_{k+2}}{k!} \right)_{k\in\mathbb{N}} \right\|_\infty \\
&\leq 1 + 1 + 1 \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, T es acotada por 3.

Por otro lado, tomemos $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ tal que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, 0, 0, 0, \ldots)$, de donde $\left\| (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\|_\infty = 1$; así, vemos que

$$\begin{aligned}
\left\| T\left((y_n)_{n\in\mathbb{N}} \right) \right\|_\infty &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \frac{y_k - y_{k+1} + y_{k+2}}{k!} \right| \\
&= \sup \left\{ \left| \frac{3}{1!} \right|, \left| \frac{2}{2!} \right|, \left| \frac{1}{3!} \right|, 0, 0, \ldots \right\} = 3,
\end{aligned}$$

de donde, se tiene que $\dfrac{\left\| T\left((y_n)_{n\in\mathbb{N}} \right) \right\|_\infty}{\left\| \left((y_n)_{n\in\mathbb{N}} \right) \right\|_\infty} = 3 \leq \|T\|$ y, en consecuencia,

$$\|T\| = 3. \qquad \square$$

EJERCICIO 3. Sea el operador $T\colon \mathcal{C}[-\pi, \pi] \to \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ tal que, para $x \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$

$$(T(x))(t) = \int_{-\pi}^{t} \operatorname{sen}(\tau) x(\tau) d\tau.$$

Pruebe que es lineal y acotado. Halle $\|T\|$.

Solución. Veamos que T es un operador lineal; sean $x, y \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, así, para $t \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$

$$T(\alpha x + y)(t) = \int_{-\pi}^{t} \operatorname{sen}(\tau)(\alpha x(\tau) + y(\tau)) d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha \int_{-\pi}^{t} \operatorname{sen}(\tau) x(\tau) d\tau + \int_{-\pi}^{t} \operatorname{sen}(\tau) y(\tau) d\tau \\
&= \alpha (T(x))(t) + (T(y))(t),
\end{aligned}
$$

por lo tanto,

$$
T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y).
$$

Ahora, comprobemos que el operador es acotado; para $x \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|T(x)\|_\infty &= \max_{-\pi \le t \le \pi} \left| \int_{-\pi}^{t} \operatorname{sen}(\tau) x(\tau) d\tau \right| \\
&\le \max_{-\pi \le t \le \pi} \int_{-\pi}^{t} |\operatorname{sen}(\tau)||x(\tau)| d\tau \\
&\le \|x\|_\infty \max_{-\pi \le t \le \pi} \int_{-\pi}^{t} |\operatorname{sen}(\tau)| d\tau \\
&= \|x\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen}(\tau)| d\tau \\
&= 4 \|x\|_\infty ;
\end{aligned}
$$

así, se tiene que $\|T\| \le 4$; por tanto, T es un operador acotado.

Por otro lado, tomemos para $n \in \mathbb{N}^*$, la función

$$
\begin{aligned}
u_n \colon [-\pi, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
s &\longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \le s \le -\frac{1}{n}; \\ ns & \text{si } -\frac{1}{n} \le s \le \frac{1}{n}; \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \le s \le \pi. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Se tiene que, $\|u_n\|_\infty = 1$; por otro lado, notemos que, para $t \in [-\pi, \pi]$, $\operatorname{sen}(t) u_n(t)$ es una función positiva y, además es una función par pues, sen y u_n son funciones impares.

Así,

$$
\begin{aligned}
\left\| T\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \right) \right\|_\infty &= \max_{-\pi \le t \le \pi} \left| \int_{-\pi}^{t} \operatorname{sen}(\tau) u_n(\tau) d\tau \right| \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(\tau) u_n(\tau) d\tau \\
&= 2 \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(\tau) u_n(\tau) d\tau \\
&= 2 \left[\int_{0}^{\frac{1}{n}} n\tau \operatorname{sen}(\tau) d\tau + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \operatorname{sen}(\tau) d\tau \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left[n(-\tau\cos(\tau) + \operatorname{sen}(\tau))\Big|_0^{\frac{1}{n}} - \cos(\tau)\Big|_{\frac{1}{n}}^{\pi} \right] \\
&= 2\left[n\left(-\frac{1}{n}\cos\left(\frac{1}{n}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \cos(\pi) + \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\
&= 2\left[-\cos\left(\frac{1}{n}\right) + n\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) + 1 + \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\
&= 2\left[n\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) + 1 \right],
\end{aligned}
$$

a lo cual tenemos que

$$
\lim_{n\to+\infty} \frac{\|Tu_n\|_\infty}{\|u_n\|_\infty} = \lim_{n\to+\infty} 2\left[n\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) + 1 \right] = 2(1+1) = 4
$$

y, en consecuencia, $\|T\| = 4$. $\square$