# CLUB DE MATEMÁTICA EPN

## ANÁLISIS EN ESPACIOS DE BANACH • EJERCICIOS 02

### APLICACIONES LINEALES

$\aleph_0$

Semestre 2019-A William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia ”Análisis Matemático I”, dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

**EJERCICIO 1.** Sea

$$\begin{aligned} I_{pq}\colon\ (\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_p) &\longrightarrow (\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_q) \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

con $p, q \in [1, +\infty[$. Pruebe que

*a)* $I_{pq}$ es acotada si $q \leq p$;

*b)* $I_{pq}$ no es acotada si $p < q$.

*Demostración.*

*a)* Sea $x \in \mathcal{C}[a,b]$; notemos que

$$\left\| I_{pq}(x) \right\|_q = \|x\|_q = \left( \int_a^b |x(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1}$$

Por otro lado, vemos que

$$\frac{q}{p} + \frac{p-q}{p} = \frac{1}{\frac{p}{q}} + \frac{1}{\frac{p}{p-q}} = 1$$

y, dado que $q < p$, se tiene que $\frac{p}{q}$ y $\frac{p}{p-q}$ son exponentes conjugados. Usando la desigualdad de Hölder en (1) tenemos que

$$\begin{aligned} \left( \int_a^b |x(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left[ \left( \int_a^b |x(t)|^{q\,\frac{p}{q}} dt \right)^{\frac{q}{p}} \cdot \left( \int_a^b 1^{\frac{p}{p-q}} dt \right)^{\frac{p-q}{p}} \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left( \int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{q}{p}\frac{1}{q}} \cdot \left( \int_a^b 1 dt \right)^{\frac{p-q}{pq}} \\ &= \left( \int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot (b-a)^{\frac{p-q}{pq}} \end{aligned}$$

$$= \|x\|_p \, (b-a)^{\frac{p-q}{pq}},$$

por lo tanto,

$$\left\|I_{pq}(x)\right\|_q \leq (b-a)^{\frac{p-q}{pq}} \, \|x\|_p$$

y, en consecuencia, $I_{pq}$ es acotada.

*b)* Ahora, comprobemos que $I_{pq}$ no es acotada si $p < q$; consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la función

$$\begin{aligned} x_n \colon \; [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto t^n, \end{aligned}$$

de donde, tenemos que $x_n \in \mathcal{C}[a,b]$ y, además, $I_{pq}(x_n) = x_n$. Así, calculemos $\left\|I_{pq}(x_n)\right\|_q$ y $\|x_n\|_p$, respectivamente.

$$\left\|I_{pq}(x_n)\right\|_q = \|x_n\|_q = \left(\int_0^1 t^{qn} dt\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{1}{qn+1} t^{qn+1}\Big|_0^1\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{qn+1}}$$

y

$$\|x_n\|_p = \int_0^1 t^{pn} dt = \frac{1}{pn+1} t^{pn+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt[p]{pn+1}}.$$

Con esto, notando que $q - p > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{||I_{pq}(x_n)||_q}{||x_n||_p} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[q]{qn+1}}}{\frac{1}{\sqrt[p]{pn+1}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[p]{pn+1}}{\sqrt[q]{qn+1}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left( n^{\frac{q-p}{pq}} \, \frac{\sqrt[p]{p+\frac{1}{n}}}{\sqrt[q]{q+\frac{1}{n}}} \right) = +\infty, \end{aligned}$$

lo cual se tiene que $I_{pq}$ no es acotada. $\square$