$\aleph_0$

Semestre 2019-A William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

EJERCICIO 1. Consideremos el espacio $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$, con $n \geq 2$, y $a \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, para cada $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{K}^n$ consideremos el funcional

$$\begin{aligned} f_a \colon \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_a(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \end{aligned}$$

Pruebe que f es lineal, acotado y que $\|f\| = \|a\|_2$.

Demostración.

a) Vamos a probar que f es lineal. Sean $x, y \in \mathbb{K}^n$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que

$$\begin{aligned} f_a(x + \alpha y) &= \sum_{k=1}^{n} a_k (x_k + \alpha y_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k x_k + \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k y_k \\ &= f_a(x) + \alpha f_a(y), \end{aligned}$$

con esto, hemos probado que f_a es lineal.

b) Vamos a probar que f es acotado; es decir, debemos probar que existe $c > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{K}^n$, se tiene que:

$$|f(x)| \leq c \|x\|_2 .$$

Sea $x \in \mathbb{K}^n$, por la desigualdad triangular y la desigualdad de Cauchy, tenemos que

$$|f_a(x)| = \left| \sum_{k=1}^{N} a_k x_k \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^{N} |a_k x_k| \\
&\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}, \\
&= \|a\|_2 \, \|x\|_2 \, ,
\end{aligned}
$$

así, tomando $c := \|a\|_2$ se prueba que f es acotado.

c) Vamos a probar que $\|f\| = \|a\|_2$. Notemos que, de la desigualdad precedente, tenemos que

$$\|f\| \leq \|a\|_2 \, ,$$

es decir, para todo $x \in \mathbb{K}^n \setminus 0$, se tiene que

$$\frac{|f_a(x)|}{\|x\|_2} \leq \|f\| \, ,$$

por otro lado, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{|f_a(a)|}{\|a\|_2} &= \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2} \\
&= \|a\|_2 \, ,
\end{aligned}
$$

por lo tanto, tenemos que

$$\|a\|_2 \leq \|f\| \, .$$

con esto, hemos probado que

$$\|f\| = \|a\|_2 \, . \qquad \square$$