Semestre 2019-A

William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

EJERCICIO 1. Sea $\rho \in \mathcal{C}[a,b]$ tal que $\rho(t) > 0$, para todo $t \in [a,b]$. Consideremos el funcional:

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{C}[a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^b \rho(t)x(t)\,dt. \end{aligned}$$

Pruebe que f es lineal, acotado en $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ y halle $\|f\|$.

Demostración.

a) Vamos a demostrar que f es lineal. Sean $x, y \in \mathcal{C}[a,b]$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x+\alpha y) &= \int_a^b \rho(t)(x(t)+\alpha y(t))\,dt \\ &= \int_a^b \rho(t)x(t) + \alpha\rho(t)y(t)\,dt \\ &= \int_a^b (\rho(t)x(t)\,dt + \alpha \int_a^b \rho(t)y(t))\,dt \\ &= f(x) + \alpha f(y), \end{aligned}$$

con esto, hemos probado que f es lineal.

b) Vamos a probar que f es acotado; es decir, debemos probar que existe $c > 0$ tal que para todo $x \in \mathcal{C}[a,b]$ se tiene que:

$$|f(x)| \le c\,\|x\|_\infty.$$

Sea $x \in \mathcal{C}[a,b]$, notemos que

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_a^b \rho(t)x(t)\,dt \right| \\ &\le \int_a^b |\rho(t)||x(t)|\,dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_a^b |p(t)| \, \|x\|_\infty \, dt \\ &= \|x\|_\infty \int_a^b |p(t)| \, dt, \end{aligned}$$

tomando $c = \displaystyle\int_a^b \rho(t)\, dt$, se prueba que f es acotada.

c) Vamos a demostrar que $\|f\| = \displaystyle\int_a^b \rho(t)$. Notemos que, de la desigualdad precedente, tenemos que

$$\|f\| \leq \int_a^b \rho(t_0)\, dt.$$

Ahora, consideremos

$$\begin{aligned} x\colon\ [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto 1, \end{aligned}$$

así, $\|x\|_\infty = 1$. Por otro lado, tenemos que

$$|f(x)| = \left| \int_a^b \rho(t) x(t)\, dt \right| = \left| \int_a^b \rho(t)\, dt \right|,$$

de donde, puesto que $\rho(t) > 0$, para todo $t\,[a,b]$, obtenemos que

$$|f(x)| = \int_a^b \rho(t)\, dt,$$

así,

$$\int_a^b \rho(t)\, dt \leq \|f\|.$$

con esto, hemos probado que

$$\|f\| = \int_a^b \rho(t)\, dt. \qquad \square$$