Club de Matemática EPN

Funcionales Lineales • Ejercicios 03

Espacios Métricos

Semestre 2019-A

William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

Ejercicio 1. Sea $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$, consideremos el funcional:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{C}[a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x(a) - x\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + x(b) \end{aligned}.$$

Pruebe que $f \in (\mathcal{C}[a,b])^*$ y halle $\|f\|$.

Demostración.

a) Vamos a demostrar que f es lineal, sean $x, y \in \mathcal{C}[a,b]$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que

$$f(x+\alpha y) = (x+\alpha y)(a) - (x+\alpha y)\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + (x+\alpha y)(b),$$

de donde

$$f(x+\alpha y) = \left[x(a) - x\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + x(b)\right] + \alpha\left[y(a) - y\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + y(b)\right],$$

es decir,

$$f(x+\alpha y) = f(x) + \alpha f(y),$$

con esto, hemos probado que f es lineal.

b) Vamos a demostrar que f es acotado, para esto, debemos probar que existe $c > 0$ tal que para todo $x \in \mathcal{C}[a,b]$ se tiene que

$$|f(x)| \leq c\,\|x\|_\infty.$$

Sea $x \in \mathcal{C}[a,b]$, tenemos que

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|x(a) - x\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + x(b)\right| \\ &\leq |x(a)| + \left|x\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + |x(b)|, \end{aligned}$$

por otro lado, para todo $t \in [a, b]$, sabemos que

$$|x(t)| \leq \|x\|_\infty ,$$

así,

$$|f(x)| \leq 3 \|x\|_\infty , \tag{1}$$

por lo tanto, tomando $c = 3$ se sigue que f es acotado.

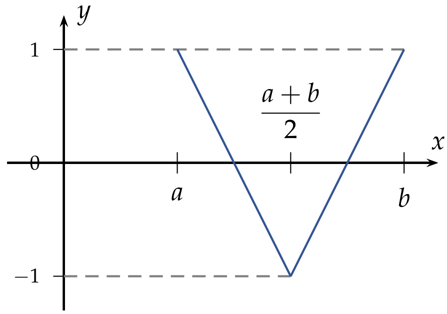
c) Vamos a demostrar que $\|f\| = 3$, notemos que, de (1), tenemos que

$$\|f\| \leq 3.$$

Ahora, para cada $t \in [a, b]$ consideremos la función:

$$\begin{aligned} u\colon [a,b] &\longrightarrow [a,b] \\ t &\longmapsto \begin{cases} \dfrac{4}{a-b}(t-a)+1 & \text{si} \quad a \leq t < \dfrac{a+b}{2}, \\ \dfrac{4}{b-a}(t-a)+1 & \text{si} \quad \dfrac{a+b}{2} \leq t \leq b. \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos observar el gráfico de esta función en la siguiente figura:



Notemos que

$$\|u\|_\infty = 1, \qquad u(a) = 1, \qquad u(b) = 1 \quad \text{y} \quad u\left(\frac{a+b}{2}\right) = -1,$$

así,

$$\begin{aligned} |f(u)| &= \left| u(a) - u\left(\frac{a+b}{2}\right) + u(b) \right| \\ &= 3, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$3 \leq \|f\| ,$$

con esto, hemos probado que

$$\|f\| = 3. \qquad \square$$