Semestre 2019-A William Granda – Alexander Constante

Estos ejercicios se basan en las clases de la materia "Análisis Matemático I", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2018-B por el profesor German Rojas. Los ejercicios fueron elaborados por William Granda y Alexander Constante, alumnos de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

EJERCICIO 1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el funcional:

$$\begin{aligned} f_n : \mathcal{C}\,[0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_{-1}^{1} t^n x(t)\,dt. \end{aligned}$$

Halle $\|f_n\|_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sean $x \in \mathcal{C}\,[-1,1]$ y $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left| \int_{-1}^{1} t^n x(t)\,dt \right| \\ &\leq \int_{-1}^{1} |t^n||x(t)|\,dt, \end{aligned}$$

es decir,

$$|f_n(x)| \leq \|x\|_\infty \int_{-1}^{1} |t^n|\,dt. \tag{1}$$

Consideremos dos casos:

a) Si n es par, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} |t^n|\,dt &= \int_{-1}^{1} t^n\,dt \\ &= \frac{2}{n+1}, \end{aligned}$$

así, junto con (1), tenemos que

$$|f_n(x)| \leq \frac{2}{n+1}\,\|x\|_\infty\,,$$

para todo $x \in \mathcal{C}\,[-1,1]$ tal que $\|x\|_\infty \leq 1$, de donde, tenemos que

$$\|f\| \leq \frac{2}{n+1}.$$

Consideremos al función:

$$\begin{aligned} u\colon [-1,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto 1, \end{aligned}$$

tenemos que

$$\|u\|_\infty = 1 \qquad \text{y} \qquad |f_n(u)| = \frac{2}{n+1},$$

así, se sigue que

$$\frac{2}{n+1} \leq \|f\|,$$

con esto, hemos probado que $\|f_n\| = \dfrac{2}{n+1}$.

b) Si n es impar, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} |t^n| &= \int_{-1}^{0} -(t^n)\,dt + \int_{0}^{1} t^n\,dt \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{(n+1)} \\ &= \frac{2}{n+1}, \end{aligned}$$

así, junto con (1) tenemos que

$$|f_n(x)| \leq \frac{2}{n+1}\|x\|_\infty,$$

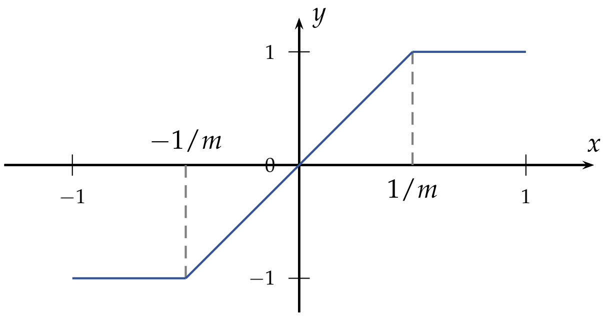
de donde,

$$\|f\| \leq \frac{2}{n+1}.$$

Ahora, para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos la función:

$$\begin{aligned} u_m\colon [-1,1] &\longrightarrow [-1,1] \\ t &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \frac{1}{m} \leq t \leq 1, \\ mt & \text{si} \quad -\frac{1}{m} \leq t \leq \frac{1}{m}, \\ -1 & \text{si} \quad -1 \leq t \leq -\frac{1}{m}. \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos observar el gráfico de esta función en la siguiente figura:



Notemos que

$$\|u_m\|_\infty = 1,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Además, para todo $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene, por paridad,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} u_m(t)t^n &= 2\left(\int_0^{\frac{1}{m}} t^n(mt)\,dt + \int_{\frac{1}{m}}^{1} t^n\,dt\right)\\ &= -\frac{2}{(n+1)(n+2)(m^n+1)} + \frac{2}{n+1},\end{aligned}$$

de donde, se sigue que

$$\left|-\frac{2}{(n+1)(n+2)(m^n+1)} + \frac{2}{n+1}\right| \leq \|f\|,$$

luego, tomando el límite cuando $m \to +\infty$, tenemos que

$$\frac{2}{n+1} \leq \|f\|,$$

con esto, hemos probado que

$$\|f\| = \frac{2}{n+1}. \qquad \square$$