EJERCICIO 1. Si el conjunto de números primos $\mathbb{P}$ es finito, entonces

$$0 < \prod_{p\in\mathbb{P}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\left(1+2\prod_{q\in\mathbb{P}} q\right)}{p}\right) = 0.$$

Solución. Notemos que si el conjunto de números primos $\mathbb{P}$ es finito, entonces

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right) \qquad \text{y} \qquad \prod_{q\in\mathbb{P}} q$$

son productos finitos, por lo tanto, están bien definidos; es decir, ambos productos son números reales, es más, si definimos

$$P = \prod_{q\in\mathbb{P}} q,$$

se tiene que $P \in \mathbb{N}$ y es mayor que todo número primo.

Ahora, dado que $1 + 2P \in \mathbb{N}$ es mayor que todo número primo, se tiene que es un número compuesto, por lo tanto, existe $\hat{p} \in \mathbb{P}$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $1 + 2P = k\hat{p}$. Por lo tanto, se tiene que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\,(1+2P)}{\hat{p}}\right) = \operatorname{sen}(k\pi) = 0,$$

de donde

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\,(1+2P)}{p}\right) = 0.$$

Ahora, como $0 < \operatorname{sen}(x)$ para todo $0 < x < \pi$ y, para todo $p \in \mathbb{P}$, $0 < \dfrac{\pi}{p} < \pi$, entonces

$$0 < \prod_{p\in\mathbb{P}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right).$$

Finalmente, como, para cada $p \in \mathbb{P}$,

$$\frac{P}{p} = \frac{\prod_{q \in \mathbb{P}} q}{p} \in \mathbb{N}$$

y dado que la periodicidad de la función seno es 2π, se tiene que, para cada $p \in \mathbb{P}$,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p} + 2\pi\frac{P}{p}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\,(1+2P)}{p}\right),$$

por lo tanto

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\,(1+2P)}{p}\right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\Big(1+2\prod_{q \in \mathbb{P}} q\Big)}{p}\right).$$

Así,

$$0 < \prod_{p \in \mathbb{P}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\Big(1+2\prod_{q \in \mathbb{P}} q\Big)}{p}\right) = 0. \qquad \square$$