Semestre 2019-2 Andrés Merino

1. EL PLANO CARTESIANO

DEFINICIÓN 1

El plano cartesiano es la representación gráfica del conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

DEFINICIÓN 2: Distancia

Para $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, se define la distancia entre estos puntos por

$$d\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

DEFINICIÓN 3: Pendiente

Para $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ puntos diferentes, con $x_1 \neq x_2$, si llamamos

$$A = (x_1, y_1) \qquad \text{y} \qquad B = (x_2, y_2),$$

se define la pendiente formada por estos puntos por

$$m_{A,B} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Si $x_1 = x_2$, se dice que los puntos forman una pendiente infinita.

TEOREMA 1: Área de un triángulo

Si los vértices de un triángulo son $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$, entonces el área del triángulo es el valor absoluto de

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

DEFINICIÓN 4: Segmento

Para $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, si llamamos

$$A = (x_1, y_1) \qquad \text{y} \qquad B = (x_2, y_2),$$

los puntos de la forma

$$A + t(B - A) = (x_1 + t(x_2 - x_1),\ y_1 + t(y_2 - y_1)),$$

con $t \in [0, 1]$, son puntos del segmento que une a A y B.

Si tomamos $t = 1/2$ en la definición anterior, el punto

$$A + \tfrac{1}{2}(B - A) = \frac{1}{2}(A + B) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

es el punto medio entre A y B.

2. PRODUCTO CARTESIANO Y RELACIONES

DEFINICIÓN 5

Dados dos conjunto A y B se define el *producto cartesiano de A y B* por el conjunto

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \quad \wedge \quad y \in B\}.$$

DEFINICIÓN 6: Relaciones

Dados dos conjunto A y B, se dice que *R es una relación de A en B* si

$$R \subseteq A \times B.$$

Una relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, por lo tanto, tiene una representación gráfica en el plano cartesiano.

Una relación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ o de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$, por lo tanto, tiene una representación gráfica en el espacio.

3. Lugar geométrico

Definición 7: Lugar geométrico
El lugar geométrico es el conjunto de todos los puntos que cumplen una determinada condición. Por lo general, esta condición está dada por una ecuación, a esta se la llama, la ecuación del lugar geométrico.

Un lugar geométrico en $\mathbb{R}^2$ es una relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

4. Transformaciones de coordenadas

Definición 8: Traslaciones en el eje x
Sea $h \in \mathbb{R}$. Para realizar una traslación en el eje x de h unidades hacia la derecha se debe realizar la siguiente transformación:

$$(x, y) \mapsto (x + h, y).$$

Definición 9: Traslaciones en el eje y
Sea $k \in \mathbb{R}$. Para realizar una traslación en el eje y de k unidades hacia arriba se debe realizar la siguiente transformación:

$$(x, y) \mapsto (x, y + k).$$

Definición 10: Reflexiones respecto al eje x
Para realizar una reflexión respecto al eje x se debe realizar la siguiente transformación:

$$(x, y) \mapsto (x, -y).$$

Definición 11: Reflexiones respecto al eje y
Para realizar una reflexión respecto al eje y se debe realizar la siguiente transformación:

$$(x, y) \mapsto (-x, y).$$

Definición 12: Reflexiones respecto al origen
Para realizar una reflexión respecto al origen se debe realizar la siguiente transformación:

$$(x, y) \mapsto (-x, -y).$$

5. Transformaciones del lugar geométrico

Definición 13: Traslaciones en el eje x

Sea $h \in \mathbb{R}$. Para realizar una traslación en el eje x de h unidades hacia la derecha se debe realizar la siguiente transformación en la ecuación del lugar geométrico:

$$(x,y) \mapsto (x-h,y).$$

Definición 14: Traslaciones en el eje y

Sea $k \in \mathbb{R}$. Para realizar una traslación en el eje y de k unidades hacia arriba se debe realizar la siguiente transformación en la ecuación del lugar geométrico:

$$(x,y) \mapsto (x,y-k).$$

Definición 15: Reflexiones respecto al eje x

Para realizar una reflexión respecto al eje x se debe realizar la siguiente transformación en la ecuación del lugar geométrico:

$$(x,y) \mapsto (x,-y).$$

Definición 16: Reflexiones respecto al eje y

Para realizar una reflexión respecto al eje y se debe realizar la siguiente transformación en la ecuación del lugar geométrico:

$$(x,y) \mapsto (-x,y).$$

Definición 17: Reflexiones respecto al origen

Para realizar una reflexión respecto al origen se debe realizar la siguiente transformación en la ecuación del lugar geométrico:

$$(x,y) \mapsto (-x,-y).$$

6. Criterios de simetría

Definición 18

Dado un lugar geométrico, se dice que es

- simétrico respecto al eje x si al realizar una reflexión respecto a este eje, el lugar geométrico no cambia.

- simétrico respecto al eje y si al realizar una reflexión respecto a este eje, el lugar geométrico no cambia.
- simétrico respecto al origen si al realizar una reflexión respecto a este punto, el lugar geométrico no cambia.

7. La recta

Definición 19: Recta

Una recta es el lugar geométrico de todos los puntos cuya pendiente entre ellos es contante.

Dada una recta ℓ, se denota por m_ℓ a la pendiente entre cualquier para de puntos de la recta. Si m_ℓ es igual a 0 se dice que es una recta horizontal y si es igual a infinito, es una recta vertical.

Proposición 2. La ecuación de una recta horizontal es de la forma

$$y = c,$$

con $c \in \mathbb{R}$ y la de una recta vertical es de la forma

$$x = c,$$

con $c \in \mathbb{R}$.

En general, la ecuación de una recta es una ecuación de primer grado.

Teorema 3

Sea $m \in \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. La ecuación de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene pendiente m es

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Teorema 4

Sea $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ puntos tales que $x_1 \neq x_2$. La ecuación de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

PROPOSICIÓN 5. Sea ℓ una recta con ecuación

$$y = mx + b,$$

se tiene que m es la pendiente de la recta y $(0, b)$ es el punto donde la recta corta el eje y.

DEFINICIÓN 20

Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas cuyas pendientes son m_1 y m_2, respectivamente. Se dice que

- las rectas son paralelas si $m_1 = m_2$; y
- las rectas son perpendiculares si $m_1 m_2 = -1$.

PROPOSICIÓN 6. Sean ℓ una recta y $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ un punto en el plano. Si la ecuación de la recta ℓ es

$$Ax + By + C = 0,$$

con $A, B, C \in \mathbb{R}$, se tiene que la distancia entre el punto (u, v) y la recta ℓ está dada por

$$\frac{|Au + Bv + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

8. LA CIRCUNFERENCIA

DEFINICIÓN 21: Circunferencia

Dados un punto $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$, una circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia al punto (h, k) es igual a r. El punto (h, k) es llamado centro de la circunferencia y a r se lo llama radio de la circunferencia.

TEOREMA 7

La ecuación de una circunferencia puede ser de la forma

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2,$$

con $h, k \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, donde

- su centro es el punto (h, k); y
- su radio es r.

TEOREMA 8

La ecuación de una circunferencia puede ser de la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

con $D, E, F \in \mathbb{R}$ tales que $D^2 + E^2 - 4F > 0$, donde

- su centro es el punto $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$; y
- su radio es $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

9. La parábola

DEFINICIÓN 22: Parábola

Dados un punto (x_0, y_0) y una recta ℓ, una parábola es el lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia al punto (x_0, y_0) es igual a la distancia a la recta ℓ.

El punto es llamado foco de la parábola y la recta es llamada directriz de la parábola.

A la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco se la llama eje de la parábola y al punto en el que esta recta corta la parábola se la llama vértice de la parábola.

⚠ Dados el punto (x_0, y_0) y la recta ℓ de ecuación $Ax + By + C = 0$, la ecuación de la parábola de foco (x_0, y_0) y directriz ℓ es

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

TEOREMA 9

Si la ecuación de una parábola es de la forma

$$(x-h)^2 = 4p(y-k),$$

con $h, k \in \mathbb{R}$ y $p > 0$, se dice que la parábola se abre hacia arriba y se tiene que

- su vértice es (h, k);
- su foco es $(h, k+p)$;
- su directriz es $y = k - p$; y
- su eje es $x = h$.

TEOREMA 10

Si la ecuación de una parábola es de la forma

$$(x-h)^2 = -4p(y-k),$$

con $h, k \in \mathbb{R}$ y $p > 0$, se dice que la parábola se abre hacia abajo y se tiene que

- su vértice es (h, k);
- su foco es $(h, k-p)$;
- su directriz es $y = k + p$; y
- su eje es $x = h$.

TEOREMA 11

Si la ecuación de una parábola es de la forma

$$(y-k)^2 = 4p(x-h),$$

con $h, k \in \mathbb{R}$ y $p > 0$, se dice que la parábola se abre hacia la derecha y se tiene que

- su vértice es (h, k);
- su foco es $(h+p, k)$;
- su directriz es $x = h - p$; y
- su eje es $y = k$.

TEOREMA 12

Si la ecuación de una parábola es de la forma

$$(y-k)^2 = -4p(x-h),$$

con $h, k \in \mathbb{R}$ y $p > 0$, se dice que la parábola se abre hacia la izquierda y se tiene que

- su vértice es (h, k);
- su foco es $(h-p, k)$;
- su directriz es $x = h + p$; y
- su eje es $y = k$.

TEOREMA 13

La ecuación de una parábola vertical puede ser de la forma

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

y la de una horizontal puede ser de la forma

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

con $D, E, F \in \mathbb{R}$.

En una parábola, la reflexión de cualquier recta perpendicular a la directriz, sobre la parábola, pasa por el foco.

10. La elipse

DEFINICIÓN 23: Elipse

Dados dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), diferentes, una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos cuya suma de la distancia al punto (x_1, y_1) y la distancia al punto (x_2, y_2) es constante.

Los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son llamados focos de la elipse. El punto medio entre estos es llamado centro de la elipse.

La recta que pasa por los focos es llamada eje mayor de la elipse y los puntos en los cuales el eje mayor corta la elipse son llamados vértices de la elipse; la mitad de la distancia entre estos puntos es llamado radio mayor.

La recta que perpendicular a eje mayor que pasa por el centro de la elipse es llamada eje menor y la mitad de la distancia entre los puntos en los que corta a la elipse el llamado radio mejor.

Dados los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), diferentes, y $a > 0$, la ecuación de una elipse es

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = 2a.$$

Aquí, a es el radio mayor de la elipse.

TEOREMA 14

Si la ecuación de una elipse es de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$$

con $h, k \in \mathbb{R}$ y $a, b > 0$ tales que $a > b$, se dice que es una elipse horizontal y se tiene que

- su centro es (h, k);
- sus vértices son $(h \pm a, k)$;
- su radio mayor es a;
- su radio menor es b; y
- sus focos son $(h \pm c, k)$, donde $a^2 = b^2 + c^2$.

TEOREMA 15

Si la ecuación de una elipse es de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1,$$

con $h, k \in \mathbb{R}$ y $a, b > 0$ tales que $a > b$, se dice que es una elipse vertical y se tiene que

- su centro es (h, k);
- sus vértices son $(h, k \pm a)$;
- su radio mayor es a;
- su radio menor es b; y
- sus focos son $(h, k \pm c)$, donde $a^2 = b^2 + c^2$.

En una elipse, la reflexión de cualquier recta que pase por un foco, sobre la elipse, pasa por el otro foco.

11. La hipérbola

DEFINICIÓN 24: Hipérbola

Dados dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), diferentes, una hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos cuya diferencia entre la distancia al punto (x_1, y_1) y la distancia al punto (x_2, y_2) es constante.

Los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son llamados focos. El punto medio entre estos es llamado centro de la hipérbola.

La recta que pasa por los focos es llamada eje de la hipérbola y los puntos en los cuales el eje mayor corta la hipérbola son llamados vértices.

Dados los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), diferentes, y $a > 0$, la ecuación de una hipérbola es

$$\left|\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}-\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}\right| = 2a.$$

Teorema 16

Si la ecuación de una hipérbola es de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,$$

con $h, k \in \mathbb{R}$ y $a, b > 0$, se dice que es una hipérbola horizontal y se tiene que (tomando $c^2 = a^2 + b^2$)

- su centro es (h, k);
- sus vértices son $(h \pm a, k)$;
- sus focos son $(h \pm c, k)$; y
- sus asíntotas son $y = k \pm \frac{b}{a}(x - h)$.

Teorema 17

Si la ecuación de una hipérbola es de la forma

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1,$$

con $h, k \in \mathbb{R}$ y $a, b > 0$, se dice que es una hipérbola vertical y se tiene que (tomando $c^2 = a^2 + b^2$)

- su centro es (h, k);
- sus vértices son $(h, k \pm a)$;
- sus focos son $(h, k \pm c)$; y
- sus asíntotas son $y = k \pm \frac{a}{b}(x - h)$.

1. Transformaciones del plano

Definición 1

Una transformación del plano es cualquier función

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Definición 2: Traslaciones

Sea $(h,k) \in \mathbb{R}^2$. La traslación del plano mediante el vector (h,k) es

$$\begin{aligned} T\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x+h, y+k). \end{aligned}$$

Definición 3: Homotecia de centro en el origen

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. La homotecia de factor α respecto al origen es

$$\begin{aligned} T\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (\alpha x, \alpha y). \end{aligned}$$

Definición 4: Escalado

Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. El escalado de razón α en el eje x y β en el eje y es

$$\begin{aligned} T\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (\alpha x, \beta y). \end{aligned}$$

Definición 5: Rotación

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. La rotación de un ángulo de θ es

$$\begin{aligned} T\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x\cos(\theta) - y\operatorname{sen}(\theta), x\operatorname{sen}(\theta) y\cos(\theta)). \end{aligned}$$

Definición 6: Reflexión

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. La reflexión mediante una recta que pasa por el origen con ángulo de inclinación θ es

$$\begin{aligned} T\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x\cos(2\theta)+y\operatorname{sen}(2\theta), x\operatorname{sen}(2\theta)-y\cos(2\theta)). \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 7: Transformación rígida

Se dice que una transformación es rígida si no altera la distancia entre los puntos.

TEOREMA 1

Las únicas transformaciones rígidas del plano son las traslaciones, rotaciones, reflexiones y composiciones de estas.

TEOREMA 2

Toda transformación rígida del plano es traslación seguida de una rotación o una traslación seguida de una reflexión.

DEFINICIÓN 8: Simetrías

Se llama simetrías de una figura a toda transformación que deja invariante a la figura.

2. MATRICES DE ROTACIÓN Y REFLEXIÓN

⚠ Toda imagen en escala de grises es una matriz cuyas componentes son números entre 0 y 1.

Toda imagen a color en formato RGB es un conjunto de 3 matrices cuyas componentes son números entre 0 y 1.

DEFINICIÓN 9

Sea $\theta \in \mathbb{R}$, se definen las siguientes matrices:

$$\operatorname{rot}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{ref}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \operatorname{sen}(2\theta) \\ \operatorname{sen}(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

las cuales son llamadas matrices de rotación y reflexión, respectivamente.

3. Grupos de simetría

Definición 10: Simetrías

El conjunto de todas las simetrías de un objeto es llamado grupo de simetrías. Este grupo cumple que la composición de cualquier dos simetrías es otra simetría.