1. Se quiere encontrar la reflexión del punto $C = (3, -1)$ mediante la recta ℓ de ecuación $x - 2y = 0$. Para esto, realice el siguiente procedimiento:

   a) Determine la distancia entre la recta ℓ y el punto C.

   b) Determine la recta perpendicular a ℓ que pase por el punto C, llame a esta ℓ_p.

   c) Determine un punto C' que esté sobre la recta ℓ_p de tal forma que la distancia de C a ℓ sea igual que la distancia de ℓ a C'.

   Este punto C' es la reflexión del punto C mediante la recta ℓ.

   Solución.

   a) La distancia entre el punto C y la recta ℓ es

$$\frac{|(3) - 2(-1) + 0|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}}.$$

   b) Supongamos que la ecuación de la recta ℓ_p es

$$y = mx + b,$$

   (utilizo esta ecuación dado que las condiciones indicadas en el ejercicios tienen que ver con perpendicularidad y por lo tanto, con la pendiente). Debemos determinar los valores de m y de b.
   Dado que ℓ y ℓ_p deben ser perpendiculares, primero debo hallar la pendiente de ℓ para ello, despejo y de la ecuación de la recta ℓ y obtengo

$$y = \frac{1}{2}x,$$

   con esto, se tiene que la pendiente de ℓ es $m_\ell = \frac{1}{2}$. Ahora, aplicando condiciones de perpendicularidad, tenemos que

$$m_\ell \cdot m = -1,$$

   por lo tanto

$$\frac{1}{2} \cdot m = -1$$

   de donde

$$m = -2$$

   y por lo tanto, la ecuación de ℓ_p es

$$y = -2x + b.$$

   Ahora, para determinar b, analizo la otra condición para la recta ℓ_p, es decir, debe pasar por el punto $(3, 1)$, por lo tanto, este punto debe cumplir la ecuación de la recta ℓ_p, por lo tanto

$$(3) = -2(1) + b$$

   de donde

$$b = 5.$$

   Así, la ecuación de ℓ_p es

$$y = -2x + 5.$$

c) Tomemos $C' = (u, v)$, debemos determinar los valores de u y v. Dado que C' está sobre la recta ℓ_p, el punto C' debe cumplir su ecuación, por lo tanto

$$(v) = -2(u) + 5. \tag{1}$$

Ahora, necesitamos que la distancia del punto C' a la recta ℓ sea igual a la distancia del punto C a la recta ℓ. Como la distancia del punto C a la recta ℓ es

$$\frac{5}{\sqrt{5}}$$

y la distancia del punto c' a la recta ℓ es

$$\frac{|(u) - 2(v) + 0|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2}} = \frac{|u - 2v|}{\sqrt{5}},$$

igualamos estos dos valores y obtenemos

$$\frac{|u - 2v|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}. \tag{2}$$

Por lo tanto, debemos resolver las ecuaciones (1) y (2). Para esto, reemplacemos (1) en (2):

$$\frac{|u - 2(-2u + 5)|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}},$$

resolviendo la ecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{|u - 2(-2u + 5)|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} &\implies |5u - 10| = 5 \\
&\implies (5u - 10)^2 = 25 \\
&\implies 25u^2 - 100u + 75 = 0 \\
&\implies u^2 - 4u + 3 = 0 \\
&\implies (u - 1)(u - 3) = 0 \\
&\implies (u = 1 \qquad \text{o} \qquad u = 3)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, reemplazando en (1)

$$v = 3 \qquad \text{o} \qquad v = -1.$$

Así, los puntos que cumplen esto son

$$(1, 3) \qquad \text{y} \qquad (3, -1).$$

Como el segundo punto es el original, tomamos el primero, es decir, el punto C' es $(1, 3)$.

□

2. Dada la gráfica de ecuación $y(x^2 + 1) = 1$, determine 3 puntos que pertenezcan a la figura.

Solución. Para hallar los puntos vamos a considerar tres valores distintos de x.

- Si $x = 0$, despejando se obtiene que $y = 1$.
- Si $x = 1$, despejando se obtiene que $y = \frac{1}{2}$.
- Si $x = -1$, despejando se obtiene que $y = \frac{1}{2}$.

Así, tenemos que los puntos

$$(0, 1), \qquad \left(1, \frac{1}{2}\right) \qquad \text{y} \qquad \left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

pertenecen a la figura. □

3. Dada la gráfica de ecuación
$$x^2 = y^2 - y + 2,$$
determinar la ecuación de la gráfica trasladada 2 unidades en el eje x y -3 unidades en el eje y.

Solución. Para esto, debemos realizar la transformación
$$(x, y) \mapsto (x - 2, y + 3)$$
en la ecuación, así, obtenemos la nueva ecuación:
$$(x-2)^2 = (y - (-3))^2 - (y - (-3)) + 2$$
que equivale a
$$(x-2)^2 = (y+3)^2 - (y+3) + 2$$
o
$$x^2 - y^2 - 4x - 5y - 4 = 0. \qquad \square$$

4. Dado un sistema coordenado, las puertas de tres edificios están en las coordenadas $(-2, 0)$, $(3, 0)$ y $(2, 1)$. Se desea colocar una pileta que esté a la misma distancia de las tres puertas, esto equivale a encontrar el centro de la circunferencia que pasa por los tres puntos. Determinar las coordenadas donde se debe colocar la pileta. (3pt)

Solución. Consideremos la ecuación de la circunferencia
$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$
donde D, E, F son valores que vamos a determinar. Dado que la circunferencia pasa por los tres puntos, se tiene que

- Para el punto $(-2, 0)$, se debe cumplir que
$$(-2)^2 + (0)^2 + D(-2) + E(0) + F = 0$$
lo que equivale a
$$4 - 2D + F = 0 \tag{3}$$
- Para el punto $(3, 0)$, se debe cumplir que
$$(3)^2 + (0)^2 + D(3) + E(0) + F = 0$$
lo que equivale a
$$9 + 3D + F = 0 \tag{4}$$
- Para el punto $(2, 1)$, se debe cumplir que
$$(2)^2 + (1)^2 + D(2) + E(1) + F = 0$$
lo que equivale a
$$5 + 2D + E + F = 0 \tag{5}$$

Así, resolvemos el sistema dado por (3), (4) y (5):
$$\begin{cases} 4 - 2D + F = 0 \\ 9 + 3D + F = 0 \\ 5 + 2D + E + F = 0. \end{cases}$$
Con esto, tenemos que
$$D = -1, \qquad E = 3 \qquad \text{y} \qquad F = -6.$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es

$$x^2 + y^2 - x + 3y - 6 = 0$$

completando los cuadrados, tenemos que la ecuación es

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{2},$$

de donde, el centro de la circunferencia es el punto

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

□

5. Dada la parábola de ecuación $y^2 + y - x + 3 = 0$, determinar su vértice, foco, directriz y eje.

Solución. Vamos a colocar la ecuación de la parábola en su forma estándar, para esto, colocamos las variables en lados opuestos de la ecuación y obtenemos

$$y^2 + y = x - 3,$$

completamos los cuadrados y tenemos

$$\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{11}{4}\right).$$

Dado que la ecuación estándar de la parábola que se abre para la derecha es

$$(y - k)^2 = 4p(x - h),$$

tenemos que

$$h = \frac{11}{4}, \qquad k = -\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad p = \frac{1}{4};$$

por lo tanto:

- **vértice:** $\left(\frac{11}{4}, -\frac{1}{2}\right)$;
- **foco:** $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$;
- **directriz:** $x = \frac{5}{2}$; y
- **eje:** $y = -\frac{1}{2}$.

□

6. Determinar si la parábola de ecuación $y^2 - y + x + 3 = 0$ y la recta de ecuación $x + y = 1$ se cortan.

Solución. Despejando x de la segunda ecuación y reemplazando su valor en la ecuación de la parábola, tenemos que

$$\begin{aligned} y^2 - y + (1 - y) + 3 &= 0 \\ y^2 - y + 1 - y + 3 &= 0 \\ y^2 - 2y + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Podemos ver que el discriminante de esta última ecuación es negativo, por lo tanto no tiene solución, lo que implica que la recta y la parábola no se cortan. □

7. Explique, en un párrafo, qué es el lugar geométrico y qué utilidad puede tener en su carrera.

---

1. Una escalera de 10 metros se ubica sobre un muro vertical de 6 metros. ¿A qué distancia de la base del muro debe estar ubicada la base de la escalera, de tal forma que coincidan la parte más alta del muro con la parte final de la escalera?

Solución. **Definamos:**

- x: la distancia, en metros, que debe existir entre la base de la escalera y la base del muro.

Planteamos: dado que se forma un triángulo rectángulo, con base x metros, altura 6 metros (la altura del muro) e hipotenusa 10 metros (longitud de la escalera), utilizando el Teorema de Pitágoras, tenemos que

$$x^2 + 6^2 = 10^2.$$

Resolvemos: despejando, obtenemos que

$$\begin{aligned} x^2 + 6^2 = 10^2 &\iff x^2 = 10^2 - 6^2 \\ &\iff x^2 = 64 \\ &\implies x = 8. \end{aligned}$$

Respuesta: La base de la escalera debe ubicarse a 8 metros de la base del muro para que coincidan la parte más alta del muro con la parte final de la escalera. □

2. Un estudiante de arquitectura, desea medir el alto de un árbol. Para esto, clava en el piso una estaca vertical. En cierto momento del día, mide el tamaño de la estaca, el tamaño de la sombra, tanto de la estaca, como del árbol. Si el tamaño de la estaca es de 50 cm, mientras que el de la sombra de la estaca y del árbol son 30 cm y 4 m, respectivamente, ¿de qué alto es el árbol?

Solución. **Definamos:**

- x: la altura, en metros, del árbol.

Planteamos: dado que la estaca de 0,5 m de alto, junto con su sombra de 0,2 m de longitud, forma un triángulo semejante al formado por el árbol de x m de alto, junto con su sombra 4 m de longitud, utilizando la propiedad de triángulos semejantes, tenemos que

$$\frac{x}{4} = \frac{0{,}5}{0{,}3}.$$

Resolvemos: despejando, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} = \frac{0{,}5}{0{,}3} &\iff x = 4\,\frac{0{,}5}{0{,}3} \\ &\iff x = \frac{20}{3} \approx 6{,}66. \end{aligned}$$

Respuesta: La altura del árbol el 6,66 m, aproximadamente. □

3. Dados $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z, u\}$, escribir, si es posible,

   a) una función inyectiva de A en B;

b) una función no sobreyectiva de A en B;

c) una función no inyectiva de A en B; y

d) una función inyectiva pero no sobreyectiva de A en B.

Solución.

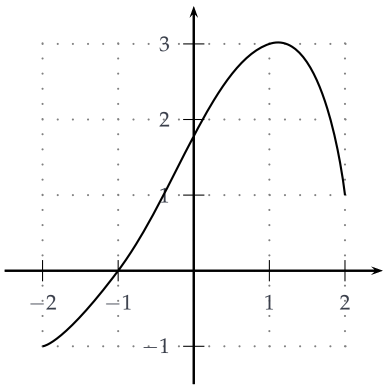
a) Una función inyectiva es
$$\{(a,x),\ (b,y),\ (c,z),\ (d,u)\}.$$

b) Una función no sobreyectiva es
$$\{(a,x),\ (b,x),\ (c,y),\ (d,z)\},$$
pues $u \in B$ no es elemento de la imagen.

c) Una función no inyectiva es
$$\{(a,x),\ (b,x),\ (c,y),\ (d,z)\},$$
pues $x \in B$ tiene dos elementos correspondientes en A.

d) No es posible encontrar una función inyectiva que no sea sobreyectiva dado que, si es inyectiva, cada uno de los cuatro elementos de A tendría una pareja distinta en B, por lo tanto, los elementos de B que estarían emparejados serían cuatro, es decir, todo los elementos de B, por lo tanto, la función sería también sobreyectiva. □

4. Considere la función $f\colon [-2,2] \to [-1,3]$ cuya gráfica se muestra a continuación.



a) Determine la imagen de la función.

b) Determine si es inyectiva.

c) Determine si es sobreyectiva.

d) Determine el intervalo donde es creciente.

e) Determine el intervalo donde es decreciente.

Solución.

a) Por el gráfico, tenemos que
$$\operatorname{img}(f) = [-1,3]$$

b) No es inyectiva dado que, por ejemplo, el elemento 2 en el conjunto de llegada, tiene dos elementos correspondientes en el conjunto de salida.

c) Sí es sobreyectiva dado que su imagen coincide con su conjunto de llegada.

d) La función es creciente en el intervalo $[-2,1]$.

e) La función es decreciente en el intervalo $[1,2]$.

□

5. Dadas

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x^2+1} \qquad \text{y} \qquad x \longmapsto 3x+1,$$

determinar $(f \circ g)(x)$, $(f \circ f)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(g \circ g)(x)$.

Solución.

- $f \circ g$: Se tiene que
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(3x+1)\\ &= \frac{1}{(3x+1)^2+1}\\ &= \frac{1}{9x^2+6x+2}.\end{aligned}$$

- $f \circ f$: Se tiene que
$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x))\\ &= f\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2+1}\\ &= \frac{x^4+2x^2+1}{x^4+2x^2+2}.\end{aligned}$$

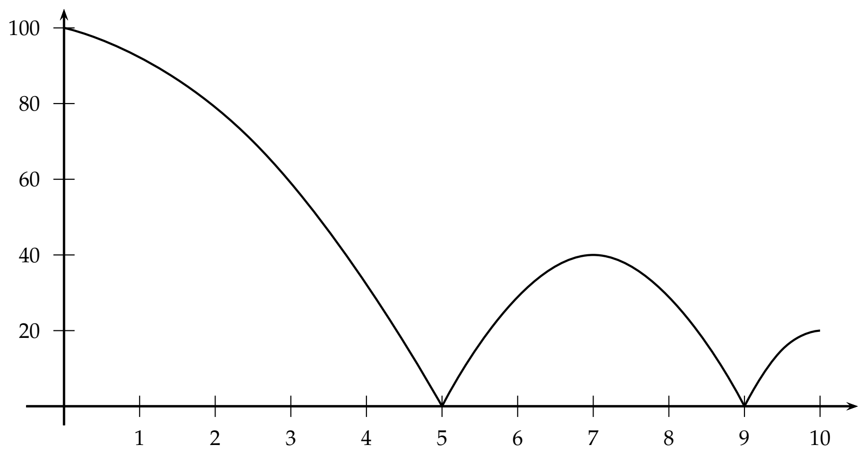
- $g \circ f$: Se tiene que
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\\ &= 3\left(\frac{1}{x^2+1}\right)+1\\ &= \frac{3+x^2+1}{x^2+1}\\ &= \frac{x^2+4}{x^2+1}.\end{aligned}$$

- $g \circ g$: Se tiene que
$$\begin{aligned}(g \circ g)(x) &= g(g(x))\\ &= g(3x+1)\\ &= 3(3x+1)+1\\ &= 9x+4.\end{aligned}$$

□

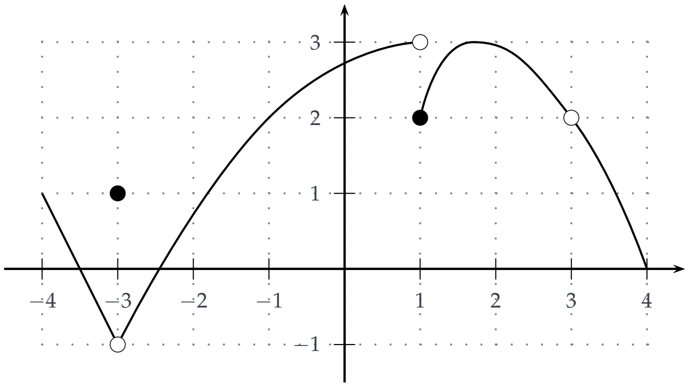
6. Desde un edificio de 100 metros se deja caer una pelota de tenis. Si se sabe que a los 5 segundos esta toca el suelo y rebota, elabore una gráfica que represente la altura de la pelota en función del tiempo, desde el inicio de su caída hasta 10 segundos después.

Solución. Si representamos el tiempo transcurrido desde que se deja la pelota en el eje horizontal y la altura de la pelota en el eje vertical, tenemos que una posible gráfica de la función que representa la altura de la pelota en función del tiempo es:



□

7. Considere la gráfica de la función $f\colon [-4,4] \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$, dada a continuación.



Determine:

a) $\lim_{x \to -3} f(x)$

b) $f(-3)$

c) $\lim_{x \to -1} f(x)$

d) $f(-1)$

e) $\lim_{x \to 1} f(x)$

f) $f(1)$

g) $\lim_{x \to 3} f(x)$

h) $f(3)$

Solución. Tenemos que:

a) $\lim_{x \to -3} f(x) = -1$.

b) $f(-3) = 1$.

c) $\lim_{x \to -1} f(x) = 2$.

d) $f(-1) = 2$.

e) $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe.

f) $f(1) = 2$.

g) $\lim_{x \to 3} f(x) = 2$.

h) $f(3)$ no existe. □

8. Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x \to -1} (x^2 - 2x + 1)$

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - x - 2}$

c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 6}$

Solución.

a) Dado que es una función polinomial, tenemos que

$$\lim_{x \to -1} (x^2 - 2x + 1) = (-1)^2 - 2(-1) + 1 = 4.$$

b) Calculemos primero el límite de denominador, dado que es una función polinomial, tenemos que

$$\lim_{x \to 0} (x^2 - x - 2) = (0)^2 - (0) - 2 = -2 \neq 0;$$

ahora, calculemos el límite del numerador, al ser una función polinomial, tenemos que

$$\lim_{x \to 0} (x^2 + 4) = (0)^2 + 4 = 4.$$

Dado que ambos límites existen y el del denominador es diferente de 0, tenemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 4}{x^2 - x - 2} = \frac{\lim_{x \to 0} (x^2 + 4)}{\lim_{x \to 0} (x^2 - x - 2)} = \frac{4}{-2} = -2.$$

c) Calculemos primero el límite de denominador, dado que es una función polinomial, tenemos que

$$\lim_{x \to 0} (x^2 - 5x + 6) = (0)^2 - 5(0) + 6 = 6 \neq 0;$$

ahora, calculemos el límite del numerador, al ser una función polinomial, tenemos que

$$\lim_{x \to 0} (x^2 - x - 2) = (0)^2 - (0) - 2 = -2.$$

Dado que ambos límites existen y el del denominador es diferente de 0, tenemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}=\frac{\displaystyle\lim_{x\to 0}(x^2-x-2)}{\displaystyle\lim_{x\to 0}(x^2-5x+6)}=\frac{6}{-2}=-3. \qquad \square$$

- Ejercicios extra: Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}.$$

Solución. Calculemos primero el límite de denominador, dado que es una función polinomial, tenemos que

$$\lim_{x\to 2}(x^2-5x+6)=(2)^2-5(2)+6=0;$$

como este límite es igual a 0, no podemos aplicar la propiedad del límite de una división. Procedamos a realizar una manipulación algebraica, notemos que

$$\frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-3)(x-2)}=\frac{x+1}{x-3}$$

para $x\neq 2$, por lo tanto, analicemos el límite

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-3};$$

calculemos primero el límite de denominador, dado que es una función polinomial, tenemos que

$$\lim_{x\to 2}(x-3)=(0)-3=-3\neq 0;$$

ahora, calculemos el límite del numerador, al ser una función polinomial, tenemos que

$$\lim_{x\to 2}(x+1)=(0)+1=1.$$

Dado que ambos límites existen y el del denominador es diferente de 0, tenemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x-3}=\frac{\displaystyle\lim_{x\to 0}(x+1)}{\displaystyle\lim_{x\to 0}(x-3)}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x-3}=-\frac{1}{3}. \qquad \square$$

---

1. Una parábola vertical tiene vértice en el punto $(-3,2)$ y pasa por el punto $(1,4)$. Determine la ecuación de la parábola y su foco.

Solución. Por la disposición de los puntos, se sabe que es una parábola que se abre hacia arriba, por lo tanto, su ecuación es

$$(x-h)^2 = 4p(y-k).$$

Tenemos que el vértice de esta parábola es (h,k), por lo tanto $h=-3$ y $k=2$. Con esto, la ecuación de la parábola es

$$(x+3)^2 = 4p(y-2).$$

Ahora, para que pase por el punto $(1,4)$, es necesario que

$$(1+3)^2 = 4p(4-2),$$

de donde, $p=2$. Así, la ecuación de la parábola es

$$(x+3)^2 = 8(y-2).$$

Finalmente, el foco de la parábola es

$$(h,k+p) = (-3,4). \qquad \square$$

2. Hallar la reflexión del punto $C=(3,1)$ mediante la recta que pasa por los puntos $A=(0,-1)$ y $B=(1,0)$. Para esto, realice el siguiente procedimiento:

   a) Determine la recta que pasa por los puntos A y B

   b) Determine la distancia entre la recta AB y el punto C.

   c) Determine la recta perpendicular a la recta AB que pase por el punto C, llame a esta recta ℓ_p.

   d) Determine un punto C' que esté sobre la recta ℓ_p de tal forma que la distancia de C a la recta AB sea igual que la distancia de ℓ_p a C'.

   Este punto C' es la reflexión del punto C mediante la recta AB.

Solución.

a) Para determinar la recta que pasa por los puntos A y B, utilizamos el modelo

$$y = mx + b. \tag{1}$$

Para esto, primero encontramos la pendiente m

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{0-(-1)}{1-(0)} = 1, \tag{2}$$

luego este valor de la pendiente y las coordenadas del punto B reemplazamos en la ecuación (1) y obtenemos el valor de b

$$0 = 1(1) + b \iff b = -1$$

y por último, tanto el valor de b como el de la pendiente m sustituimos en la ecuación (1). Con lo cual, la ecuación que pasa por los puntos A y B es

$$y = x-1 \iff 0 = x-y-1.$$

b) La distancia entre el punto C y la recta que pasa por los puntos A y B es

$$\frac{|(1)3 - 1(1) - 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

c) Supongamos que la ecuación de la recta ℓ_p es

$$y = mx + b,$$

(utilizo esta ecuación dado que las condiciones indicadas en el ejercicios tienen que ver con perpendicularidad y por lo tanto, con la pendiente). Debemos determinar los valores de m y de b.

Dado que la recta que pasa por los puntos A, B y ℓ_p deben ser perpendiculares; el producto de sus pendientes debe ser -1. El valor de la pendiente de la recta que pasa por A y B se encuentra en la ecuación (2), con lo cual obtenemos el valor de m_ℓ es la única incógnita

$$m \cdot m_\ell = -1,$$

por lo tanto

$$1 \cdot m = -1$$

de donde

$$m_l = -1$$

y por lo tanto, la ecuación de ℓ_p es

$$y = -x + b.$$

Ahora, para determinar b, analizo la otra condición para la recta ℓ_p, es decir, debe pasar por el punto $(3, 1)$, por lo tanto, este punto debe cumplir la ecuación de la recta ℓ_p, por lo tanto

$$1 = -1(3) + b$$

de donde

$$b = 4.$$

Así, la ecuación de ℓ_p es

$$y = -x + 4.$$

d) Tomemos $C' = (u, v)$, debemos determinar los valores de u y v. Dado que C' está sobre la recta ℓ_p, el punto C' debe cumplir su ecuación, por lo tanto

$$(v) = -(u) + 4. \tag{3}$$

Ahora, necesitamos que la distancia del punto C' a la recta que pasa por los puntos A y B sea igual a la distancia del punto C a la recta que pasa por los puntos A y B. Como la distancia de esta recta al punto C es

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

y la distancia del punto C' a la recta que pasa por los puntos A y B es

$$\frac{|(u) - (v) - 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{|u - v - 1|}{\sqrt{2}},$$

igualamos estos dos valores y obtenemos

$$\frac{|u - v - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{4}$$

Por lo tanto, debemos resolver las ecuaciones (3) y (4). Para esto, reemplacemos (3) en (4):

$$\frac{|u - (-u + 4) - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

resolviendo la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{|u-(-u+4)-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} &\Longrightarrow |2u-5| = 1 \\ &\Longrightarrow (2u-5)^2 = 1 \\ &\Longrightarrow 4u^2 - 20u + 24 = 0 \\ &\Longrightarrow u^2 - 5u + 6 = 0 \\ &\Longrightarrow (u-3)(u-2) = 0 \\ &\Longrightarrow (u = 3 \quad \text{o} \quad u = 2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, reemplazando en (4)

$$v = 1 \qquad \text{o} \qquad v = 2.$$

Así, los puntos que cumplen esto son

$$(3,1) \qquad \text{y} \qquad (2,2).$$

Como el primer punto es el original, tomamos el segundo, es decir, el punto C' es $(2,2)$.

□

3. Determinar cuál de las siguientes relaciones representa a una función.

   a) $R_1 = \{(2,3); (-2,4); (3,-5); (2,2)\}$.
   b) $R_2 = \{(1,3); (-2,4); (3,-5); (-2,2)\}$.
   c) $R_3 = \{(2,3); (-2,3); (3,3); (-3,3)\}$.
   d) $R_4 = \{(0,3); (-2,4); (3,-5); (0,2)\}$.

Solución.

a) $R_1 = \{(2,3); (-2,4); (3,-5); (2,2)\}$. Esta relación no es función, pues a uno de los elementos del conjunto de partida le corresponde dos imágenes distintas; es decir, en el primer par ordenado y en el cuarto par ordenado a pesar de que las preimágenes son iguales, sus imágenes son distintas.

b) $R_2 = \{(1,3); (-2,4); (3,-5); (-2,2)\}$. Esta relación no es función; en el segundo y cuarto par ordenados, a la -2 le corresponde diferente imagen.

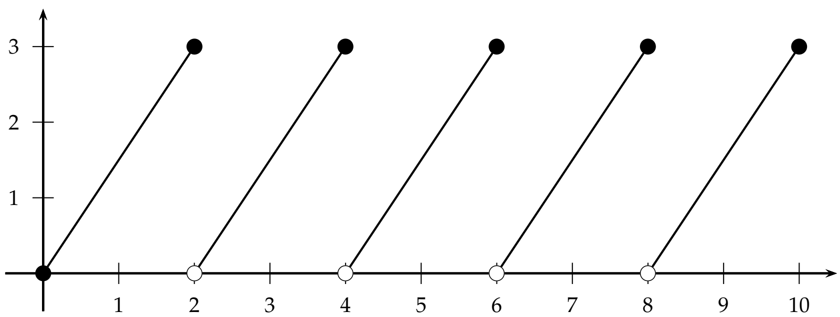
c) $R_3 = \{(2,3); (-2,3); (3,3); (-3,3)\}$. Esta relación sí es función; pues a cada preimagen le corresponde una única imagen.

d) $R_4 = \{(0,3); (-2,4); (3,-5); (0,2)\}$. Esta relación no es función; en el primer y cuarto pares ordenados, a la preimagen le corresponden imágenes distintas.

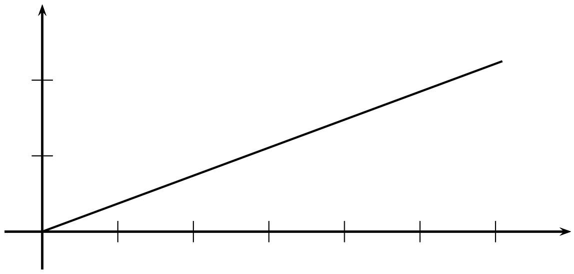
□

4. En cierto sector de la ciudad, un colector de basura de 3 toneladas demora 2 días en llenarse, luego de esto un camión lo vacía para que su contenido sea usado para generar energía. Represente el volumen de basura del contenedor en función del tiempo durante 10 días. Represente también la producción de energía en función de la basura almacenada.

Solución.

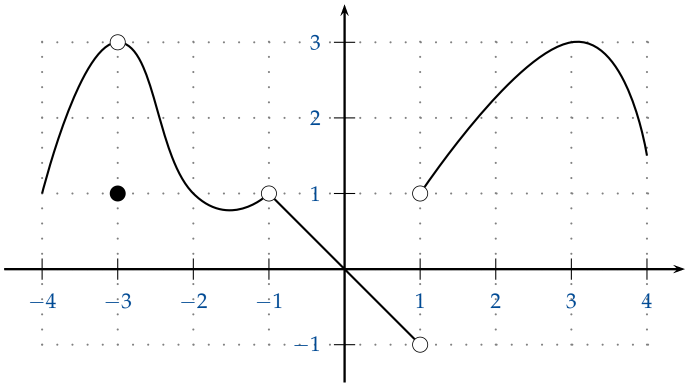


La gráfica solicitada para la producción de energía en función de la basura recolectada es



$\square$

5. Considere la gráfica de la función $f\colon [-4,4] \setminus \{-1,1\} \to \mathbb{R}$, dada a continuación.



Determine:

a) $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$

b) $f(-3)$

c) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$

d) $f(-1)$

e) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

f) $f(1)$

g) $\lim\limits_{x\to3} f(x)$

h) $f(3)$

Solución. Tenemos que:

a) $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = 3$.

b) $f(-3) = 1$.

c) $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = 1$.

d) $f(-1)$ no existe.

e) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ no existe.

f) $f(1)$ no existe.

g) $\lim\limits_{x\to3} f(x) = 3$.

h) $f(3) = 3$. $\square$

6. Determinar, usando la definición mediante el límite, la derivada de las siguientes funciones:

a) $g(x) = x^2 - 2x$

b) $p(x) = \dfrac{3}{2x}$.

Solución.

a) Se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - 2(x+h) - (x^2-2x)}{h}\\ &= \frac{x^2+2xh+h^2-2x-2h-x^2+2x}{h}\\ &= \frac{2xh+h^2-2h}{h}\\ &= 2x+h-2\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2x+h-2 \\ &= 2x-2. \end{aligned}$$

b) Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{p(x+h)-p(x)}{h} &= \frac{\dfrac{3}{2(x+h)}-\dfrac{3}{2x}}{h} \\ &= \frac{\dfrac{6x-6(x+h)}{4x(x+h)}}{h} \\ &= \frac{\dfrac{-6h}{4x(x+h)}}{h} \\ &= -\frac{6h}{4xh(x+h)} \\ &= -\frac{3}{2x(x+h)}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} p'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{p(x+h)-p(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-3}{2x(x+h)} \\ &= -\frac{3}{2x^2}. \end{aligned}$$

□

7. Determinar los extremos de la función

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x^3+3x^2-12x+5. \end{aligned}$$

Solución. Empecemos determinando la derivada de la función:

$$f'(x) = 6x^2+6x-12,$$

ahora, para encontrar los puntos críticos, igualemos la derivada a 0, notemos que

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\iff 6x^2+6x-12=0 \\ &\iff x^2+x-2=0 \\ &\iff (x-1)(x+2)=0 \\ &\iff x=1 \quad \text{o} \quad x=-2, \end{aligned}$$

Con esto, la función tiene puntos críticos en 1 y en -2. Para saber si son mínimos o máximos, volvamos a derivar la función:

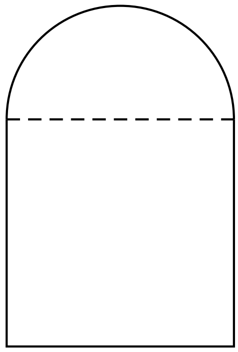
$$f''(x) = 12x+6.$$

Evaluamos la segunda derivada en los puntos críticos:

$$f''(1)=18 \qquad \text{y} \qquad f''(-2)=-18,$$

por lo tanto, la función alcanza un mínimo en 1 y un máximo en -2. □

8. Se desea construir vitrales con la siguiente forma:



Si la parte inferior es un rectángulo, la parte superior es un semicírculo y únicamente se cuenta con 4 m de material para el borde, ¿cuáles deben ser las dimensiones para que el vitral tenga el área más grande posible?.

Solución. Definamos:

- b: longitud, en m, de la base del vitral.
- h: altura, en m, del rectángulo del vitral.
- $A(b,h)$: área, en m^2, del vitral cuya longitud de la base es b metros altura del rectángulo es h metros.

Dado que solo se cuenta con 4 m de material, lo máximo que puede valer la altura es 2 m y lo máximo que puede valer la base es $8/(\pi+2)$, por lo tanto, el área del vitral está dado por

$$\begin{aligned} A\colon [0,8/(\pi+2)]\times[0,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (b,h) &\longmapsto bh+\frac{1}{2}\pi(b/2)^2. \end{aligned}$$

Ahora, dado que se cuenta únicamente con 4 m de material para el borde, tenemos que

$$b+2h+\frac{\pi b}{2}=4,$$

de donde

$$h=\frac{8-2b-\pi b}{4}$$

Reemplazando esta expresión en la función de área, obtenemos una nueva función que modeliza el área, con eso, definamos

- $S(b)$: área, en m^2, del vitral cuya longitud de la base es b y tiene 4 m de borde,

y tenemos

$$\begin{aligned} S\colon [0,8/(\pi+2)] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ b &\longmapsto b\frac{8-2b-\pi b}{4}+\frac{1}{2}\pi(b/2)^2=-\frac{\pi}{8}b^2-\frac{1}{2}b^2+2b. \end{aligned}$$

Como debemos encontrar el máximo de esta función, procedamos a derivar la función S; se tiene que

$$S'(b)=-\frac{\pi}{4}b-b+2$$

para $b\in[0,8/(\pi+2)]$. Ahora, para encontrar sus puntos críticos, notemos que

$$\begin{aligned} S'(b)=0 &\iff -\frac{\pi}{4}b-b+2=0 \\ &\iff b=\frac{8}{4+\pi}. \end{aligned}$$

Así, el punto crítico es $\frac{8}{4+\pi}$. Como la función está definida en un intervalo cerrado y acotado, la función alcanza su máximo en los extremos del intervalo o en los puntos críticos del interior, es decir, en los puntos 0, $\frac{8}{4+\pi}$ y $8/(\pi+2)$. Dado que tenemos

$$S(0) = 0, \qquad S\left(\frac{8}{4+\pi}\right) = \frac{8}{4+\pi} \approx 1{,}1202 \qquad \text{y} \qquad S\left(\frac{8}{\pi+2}\right) = \frac{8\pi}{(2+\pi)^2} \approx 0{,}9507,$$

la función S alcanza el máximo valor de $\frac{8}{4+\pi}$ en $\frac{8}{4+\pi}$.

Para encontrar el valor de la altura del rectángulo buscado, primero reemplazamos el valor de b en la expresión $h = \frac{8-2b-\pi b}{4}$:

$$h = \frac{4}{4+\pi},$$

En resumen, las dimensiones para que el vitral tenga la mayor área son $\frac{8}{4+\pi}$ m de base y $\frac{4}{4+\pi}$ m de altura. $\square$