ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA

EJERCICIOS DE REFUERZO DE LA SEMANA 1

Docente: Francisco Álvarez

EJERCICIOS DE SIMPLIFICACIÓN

Realizar operaciones algebraicas y simplificar

1. $\frac{(mn)^{-2}+(xy)^{-2}}{(xmyn)^{-2}}$

2. $\frac{\frac{x-z}{x+y+z}-\frac{z}{xy}}{\frac{xy(x-z)-z(x+y+z)}{xyz+xy^2+x^2y}}$

3. $\frac{8t+3}{49t+7}+\frac{-5t-2}{56t+8}$

4. $\frac{1}{2x^2-2}+\frac{2}{\sqrt{2}x+\sqrt{2}}$

5. $\frac{1}{5x+15}-\frac{1}{x^2+6x+9}-\frac{2}{x^3+9x^2+27x+27}$

6. $\frac{5}{4x^2+8x+3}+\frac{6}{1+2x}$

7. $\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}$

8. $\frac{\left(xy+\frac{1}{wz}\right)^s\left(xy-\frac{1}{wz}\right)^t}{\left(wz+\frac{1}{xy}\right)^s\left(wz-\frac{1}{xy}\right)^t}$

9. $\frac{a^4+7a^3-a^2-67a-60}{a^3+10a^2+29a+20}$

10. $\left(a^3-\frac{1}{4a^3}\right)^2+1$

Docente: Francisco Álvarez

EJERCICIOS DE RACIONALIZACIÓN

Racionalizar el denominador

1. $\frac{4a-4b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$
2. $\frac{c}{\sqrt{5}+\sqrt{ab}}$
3. $\frac{5}{\sqrt{ab}-\sqrt[4]{cd}}$
4. $\frac{3}{\sqrt[3]{mn}-\sqrt[3]{pq}}$
5. $\frac{xy+wz}{\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{xzwy}+\sqrt[3]{w^2z^2}}$
6. $\frac{4}{\sqrt[3]{pq}+\sqrt[3]{mn}}$
7. $\frac{xy-wz}{\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{xzwy}+\sqrt[3]{w^2z^2}}$

Racionalizar el numerador

8. $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+b}}{b\sqrt{a}\sqrt{a+b}}$
9. $\frac{\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{2}}{m+2}$
10. $\frac{\sqrt{2(a+b)+1}-\sqrt{2a+1}}{b}$

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
DEPARTAMENTO DE FORMACIÓN BÁSICA
CURSO DE NIVELACIÓN
FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA
TAREA 2.2
CUANTIFICADORES, MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN Y DEFINICIONES DE CONJUNTOS

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1. Sean P, Q y R tres proposiciones; la proposición:

$$P \vee Q \leftrightarrow P \vee R,$$

¿es una tautología?

Solución. La proposición **no** es una tautología. En efecto, existen asignaciones de verdad para P, Q y R bajo las cuales la proposición $P \vee Q \leftrightarrow P \vee R$ es falsa, como podemos ver en la tabla de valores de verdad de la proposición:

P	Q	R	$P \vee Q$	$P \vee R$	$P \vee Q \leftrightarrow P \vee R$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F
F	F	F	F	F	V

así, si P y R son falsas y Q es verdadera, o si P y Q son falsas y R es verdadera, la proposición $P \vee Q \leftrightarrow P \vee R$ es falsa.

Podemos notar que para responder a la pregunta de si $P \vee Q \leftrightarrow P \vee R$ es tautología, no es necesario realizar toda la tabla de verdad; basta encontrar los valores de verdad para los cuales la proposición no es verdadera. Estos valores de verdad constituyen un **contraejemplo** para la afirmación de que la proposición $P \vee Q \leftrightarrow P \vee R$ es una tautología. □

2. Sean P, Q y R tres proposiciones; la proposición:

$$P \wedge Q \leftrightarrow P \wedge R,$$

¿es una tautología?

Solución. La proposición **no** es una tautología. En efecto, existen asignaciones de verdad para P, Q y R bajo las cuales la proposición $P \wedge Q \leftrightarrow P \wedge R$ es falsa, como podemos ver en la tabla de valores de verdad de la proposición:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$P \wedge Q \leftrightarrow P \wedge R$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	V

así, si P y R son verdaderas y Q es falsa, o si P y Q son verdaderas y R es falsa, la proposición $P \wedge Q \leftrightarrow P \wedge R$ es falsa.

Podemos notar que para responder a la pregunta de si $P \vee Q \leftrightarrow P \wedge R$ es tautología, no es necesario realizar toda la tabla de verdad; basta encontrar los valores de verdad para los cuales la proposición no es verdadera. Estos valores de verdad constituyen un **contraejemplo** para la afirmación de que la proposición $P \wedge Q \leftrightarrow P \wedge R$ es una tautología. □

3. Refutar con un contraejemplo la siguiente afirmación: si P y Q son dos proposiciones entonces la proposición

$$P \vee Q \leftrightarrow P \wedge Q$$

es una tautología.

Solución. Para refutar una afirmación, es necesario hallar ciertos valores de verdad para P y Q de tal manera que $P \vee Q \leftrightarrow P \wedge Q$ sea falsa.

Supongamos que P es verdadera y Q es falsa. La tabla de verdad de la proposición $P \vee Q \leftrightarrow P \wedge Q$ bajo estas asignaciones es la siguiente:

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q \leftrightarrow P \wedge Q$
V	F	V	F	F

por lo que, si P es verdadera y Q, la afirmación: $P \vee Q \leftrightarrow P \wedge Q$ es una tautología, es refutada.

□

4. Refutar con un contraejemplo la siguiente afirmación: si P, Q y R son tres proposiciones, entonces la proposición

$$(P \to Q) \leftrightarrow (P \to R)$$

es una tautología.

Solución. Para refutar una afirmación, es necesario hallar ciertos valores de verdad para P, Q y R de tal manera que $(P \to Q) \leftrightarrow (P \to R)$ sea falsa.

Supongamos que P y Q son verdaderas y R es falsa. La tabla de verdad de la proposición $(P \to Q) \leftrightarrow (P \to R)$ bajo estas asignaciones es la siguiente:

P	Q	R	$P \to Q$	$P \to R$	$(P \to Q) \leftrightarrow (P \to R)$
V	V	F	V	F	F

por lo que, si P y Q son verdaderas y R es falsa, la afirmación: $(P \to Q) \leftrightarrow (P \to R)$ es una tautología, es refutada.

También podemos refutar esta afirmación si suponemos que P y R son verdaderas y Q es falsa; construyendo la tabla de verdad de la proposición $(P \to Q) \leftrightarrow (P \to R)$ bajo estas asignaciones de verdad tenemos lo siguiente:

P	Q	R	$P \to Q$	$P \to R$	$(P \to Q) \leftrightarrow (P \to R)$
V	F	V	F	V	F

por lo que, bajo estos valores de verdad para P, Q y R, la afirmación también es falsa.

□

Solución. □

5. Mediante el Método de Demostración Contrarecíproco probar la validez de:

$$(p \wedge q) \vee r \implies q \vee r$$

6. Mediante el Método de Demostración Contrarecíproco probar la validez de:

$$(p \vee \neg r) \wedge \neg p \implies \neg p \wedge \neg r$$

Solución. □

Método de demostración de reducción al absurdo

7. Sean $P,\ Q,\ R$ y S cuatro proposiciones. Si $P \to Q$ y $R \to S$. Demostrar empleado el método de reducción al absurdo que:

$$(P \wedge R) \to (Q \wedge S)$$

es una proposición verdadera.

Solución. □

8. Sean P y Q dos proposiciones. Demostrar empleado el método de reducción al absurdo que:

$$P \to (P \vee Q)$$

es una proposición verdadera.

Solución. $\square$

9. Sean $p,\ q$ y r tres proposiciones. Dadas las siguientes premisas:

$$\begin{aligned} P_1 &: \ p \ \vee \ q \\ P_2 &: \ p \to r \\ P_3 &: \ q \to r \end{aligned}$$

Demostrar que se puede concluir r empleado el método de reducción al absurdo.

10. Dar un valor de verdad a las siguientes proposiciones:

a) Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $x^* \geq 0$ tal que $x + x^* \geq 0$..

b) Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 - 1 = 0$.

c) Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que, o bien $x \geq 3$ y $x \leq 4$, o bien $x \geq -5$ y $x + 9 \leq 0$.

d) Para todo $x \geq 0$ y todo $y \leq 0$ entonces $-x \cdot y \leq 0$.

11. Mediante el uso de símbolos lógicos, pasar las siguientes proposiciones abiertas del lenguaje común al lenguaje lógico:

a) Todos los números reales son, o bien positivos, o bien negativos, o bien igual a cero.

b) Si dos números reales son distintos de cero, entonces su producto es distinto de cero.

c) El cuadrado de todo real es siempre no negativo.

d) Para cualquier número entero existe otro entero tal que su suma sea igual a cero.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1. Miscelánea de Operaciones Algebraicas, Álgebra de Baldor Ejercicio 61 del 3 al 30 impares
2. Miscelánea de Productos Notables, Álgebra de Baldor, Ejercicio 68 múltiplos de 3
3. Miscelánea de Factorización, Álgebra de Baldor, Ejercicio 106 múltiplos de 5
4. Álgebra de Baldor, Ejercicio 84 los números 3, 6, 9, 12 y 15
5. Efectuar las operaciones indicadas y simplificar

   a) $\dfrac{a^2-4}{a^2-4a+4}$

   b) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$

   c) $\dfrac{x^2-x-12}{x^2-9}\cdot\dfrac{3+x}{4-x}$

   d) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3}\cdot\dfrac{3-x}{3+x}$

   e) $\dfrac{x^-1+y^-1}{(x+y)^-1}$

   f) $\dfrac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{1-x^2}$

   g) $\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3+4x^2+4x}$

   h) $\dfrac{\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-1}}{\dfrac{2x^2+5x+2}{x^2+x-2}}$

   i) $\dfrac{\dfrac{a-b}{a}-\dfrac{a+b}{b}}{\dfrac{a-b}{b}+\dfrac{a+b}{a}}$

   j) $\dfrac{4y^2-9}{2y^2+9y-18}\div\dfrac{2y^2+y-3}{y^2+5y-6}$

   k) $\dfrac{a^3+a^2b+ab^2}{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}\cdot\dfrac{(a^2-b^2)(a-b)^2}{a^2+ab+b^2}$

   l) $\dfrac{x}{x^2-x-6}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x-3}$

   m) $\dfrac{\left(a+\dfrac{1}{b}\right)^m\cdot\left(a-\dfrac{1}{b}\right)^n}{\left(b+\dfrac{1}{a}\right)^m\cdot\left(b-\dfrac{1}{a}\right)^n}$

6. Racionalizar el denominador

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

   b) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$

c) $\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$

d) $\dfrac{2\cdot(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

e) $\dfrac{y}{\sqrt{3}+\sqrt{y}}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{m}-\sqrt[4]{n}}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[4]{b}}$

h) $\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$

i) $\dfrac{x^3-y^3}{\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{x}}$