Doble inducción

Jonathan Ortiz

16 de abril de 2014

Sean x un real y $n \in \mathbb{N}$, queremos hallar el determinante de la matriz de orden n:

$$A_n = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x \end{pmatrix}$$

Donde x es cualquier número real.

Vamos a encontrar su determinante inductivamente.
Para $n = 2$, tenemos:

$$A_2 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$$

Por lo tanto es fácil ver que: $|A_2| = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.
Para $n = 3$, tenemos:

$$A_3 = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Por lo tanto si restamos la primera fila con la segunda, le ponemos en la primera y sacamos factor común:

$$|A_3| = (x-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1) \left(\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} \right)$$

Por todo este análisis tengo:

$$|A_3| = (x-1)[|A_2| + (x-1)] = (x-1)^2(x+2)$$

Para $n = 4$, tenemos:

$$A_4 = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Por lo tanto si restamos la primera fila con la segunda, le pongemos en la primera y sacamos factor común tenemos:

$$|A_4| = (x-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1) \left(\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \right)$$

Aquí surge la idea de primero hallar el determinante de la matriz de orden n:

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x \end{pmatrix}$$

Vamos a proceder de nuevo inductivamente: Para $n = 2$, tenemos:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$$

Por lo tanto es fácil ver que: $|B_2| = x - 1$.
Para $n = 3$, tenemos:

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Por lo tanto si restamos la primera fila con la segunda, le ponemos en la primera y sacamos factor común:

$$|B_3| = (1-x)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)^2$$

Para $n = 4$, tenemos:

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Por lo tanto si restamos la primera fila con la segunda, le pongemos en la primera y sacamos factor común tenemos:

$$|B_4| = (1-x)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)(x-1)^2 = (x-1)^3$$

Por este análisis podemos inferir que:

$$|B_n| = (x-1)^{n-1}$$

Vamos a desmostrarlo por inducción matemática. Supongamos que se verifica hasta $n - 1$, vamos a probarlo para n.

$$|B_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

Por lo tanto si restamos la primera fila con la segunda, le pongemos en la primera y sacamos factor común tenemos:

$$|B_n| = (1-x)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix} = (x-1)|B_{n-1}| = (x-1)^{n-1}$$

Esto prueba que:

$$|B_n| = (x-1)^{n-1}$$

Regresamos al análisis de A_4.

$$|A_4| = (x-1)[|A_3| + |B_3|] = (x-1)[(x-1)^2(x+2) + (x-1)^2] = (x-1)^3(x+3)$$

Por este análisis podemos inferir que:

$$|A_n| = (x-1)^{n-1}(x+n-1)$$

Vamos a desmostrarlo por inducción matemática. Supongamos que se verifica hasta $n-1$, vamos a probarlo para n.

$$|B_n| = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

Por lo tanto si restamos la primera fila con la segunda, le pongemos en la primera y sacamos factor común tenemos:

$$|A_n| = (x-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix} = (x-1)(|A_{n-1}|+|B_{n-1}| = (x-1)[(x-1)^{n-2}(x+n-2)+(x-1)^{n-2}])$$

Todo esto prueba que:

$$|A_n| = (x-1)^{n-1}(x+n-1).$$