Teorema 1. *Sean E un espacio de Banach uniformemente convexo, $A \subseteq E$ un conjunto cerrado, convexo, no vacío. Entonces existe $x \in A$ tal que $\|x\| \leq \|y\|$ para todo $y \in A$.*

Lema 1. *Sea E un espacio de Banach uniformemente convexo. Entonces, para todo $M > 0$ y para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \delta,$$

para todo $x,\ y \in E$ con $\|x\| \leq M$, $\|y\| \leq M$ y $\|x-y\| > \epsilon$.

Demostración del Teorema. Sean E un espacio de Banach uniformemente convexo, $A \subseteq E$ un conjunto cerrado, convexo, no vacío. Por el absurdo, supongamos que para todo $x \in A$ existe $y \in A$ tal que $\|y\| < \|x\|$. Tomemos $d = \inf_{x\in A} \|x\|$. Para $n = 1$, existe $y_1 \in A$ tal que $\|y_1\| \leq d + 1$; ahora, por inducción, para $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in A$ tal que

$$\|y_n\| \leq d + \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad \|y_n\| < \|y_{n+1}\|.$$

n-1 Por lo tanto obtenemos la sucesión (y_n) en A tal que $\|y_n\| \to d$ cuando $n \to +\infty$ y $\|y_n\| < \|y_{n+1}\|$. Tenemos que la sucesión (y_n) es de Cauchy, pues de no ser así, existiría $\epsilon > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ existen $n,\ m \in \mathbb{N}$ tales que

$$n > m > N \qquad \text{y} \qquad \|y_n - y_m\| > \epsilon.$$

Dado que la sucesión $(\|y_n\|)$ es convergente, está acotada, por lo tanto existe $M > 0$ tal que $\|y_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Podríamos aplicar el lema para M y ϵ, y obtendríamos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \delta,$$

para todo $x,\ y \in E$ con $\|x\| \leq M$, $\|y\| \leq M$ y $\|x-y\| > \epsilon$.

Tomando $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$N_0 > \text{máx}\left\{ \sqrt{\frac{2}{\delta}}, \frac{4d}{\delta} \right\},$$

para este N_0 existirían $n,\ m \in \mathbb{N}$ tales que

$$n > m > N_0 \qquad \text{y} \qquad \|y_n - y_m\| > \epsilon,$$

y dado que $\|y_n\| \leq M$, $\|y_m\| \leq M$ y $\|y_n - y_m\| > \epsilon$ obtendríamos

$$\left\| \frac{y_n+y_m}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|y_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_m\|^2 - \delta. \tag{1}$$

Por otro parte tenemos que

$$\|y_n\| \leq d + \frac{1}{N_0} \qquad \text{y} \qquad \|y_m\| \leq d + \frac{1}{N_0},$$

por lo tanto

$$\frac{1}{2}\|y_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_m\|^2 \leq d^2 + 2\frac{d}{N_0} + \frac{1}{N_0^2};$$

reemplazando esto último en (1) obtendríamos

$$\left\| \frac{y_n+y_m}{2} \right\|^2 \leq d^2 + 2\frac{d}{N_0} + \frac{1}{N_0^2} - \delta.$$

Por la forma que se tomó N_0, se tiene que $2\frac{d}{N_0} + \frac{1}{N_0^2} - \delta < 0$, por lo tanto, tendríamos

$$\left\| \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2 < d^2,$$

de donde obtendríamos

$$\left\| \frac{y_n + y_m}{2} \right\| < d,$$

pero al ser A convexo, $\frac{y_n+y_m}{2} \in A$, y por la definición de d,

$$\left\| \frac{y_n + y_m}{2} \right\| \geq d,$$

lo cual no puede darse. Por lo tanto (y_n) necesariamente debe ser de Cauchy y, al ser E de Banach, existe $\bar{y} \in E$ tal que $y_n \to \bar{y}$ y por la continuidad de la norma obtenemos $\|y\| = d$, lo cual implica que $\bar{y} \notin A$ pues de estarlo, existiría $y \in A$ tal que $\|y\| < d$ lo cual contradice la definición de d, por lo tanto hemos obtenido una sucesión (y_n) en A que converge a un elemento que no está en A, por lo tanto A no es cerrado, lo que contradice la hipótesis. Quedando así demostrado el teorema. □

Demostración del Lema. Por el absurdo, supongamos que existen $M > 0$ y $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existen $x,\ y \in E$ tal que

$$\|x\| \leq M, \quad \|y\| \leq M, \quad \|x - y\| > \epsilon$$

y

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 > \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \delta.$$

Por lo tanto, se pueden formar sucesiones (x_n) y (y_n) tales que

$$\|x_n\| \leq M, \quad \|y_n\| \leq M, \quad \|x_n - y_n\| > \epsilon$$

y

$$\left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\|^2 > \frac{1}{2}\|x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_n\|^2 - \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Puesto que las sucesiones $(\|x_n\|)$ y $(\|y_n\|)$ son acotadas, tienes subsucesiones convergentes. Por simplicidad, a estas subsucesiones las renombramos $(\|x_n\|)$ y $(\|y_n\|)$, y sean a y b sus límites respectivos, aplicando desigualdad triangular a (2) obtenemos

$$\left(\frac{\|x_n\| + \|y_n\|}{2} \right)^2 > \frac{1}{2}\|x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_n\|^2 - \frac{1}{n}.$$

Aplicando el límite cuando $n \to +\infty$ se obtiene $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, de donde, desarrollando, se obtiene $(a-b)^2 \leq 0$ y por lo tanto $a = b$.

Tomemos $b_n = \text{máx}\{\|x_n\|, \|y_n\|\}$ se tiene que $b_n \neq 0$ pues $\|x_n - y_n\| > \epsilon$ y además $b_n \to a$ cuando $n \to +\infty$, ahora tomemos

$$x'_n = \frac{x_n}{b_n} \quad \text{y} \quad y'_n = \frac{y_n}{b_n}$$

se tiene que $\|x'_n\| \leq 1$, $\|y'_n\| \leq 1$ y, puesto que $\|x_n - y_n\| > \epsilon$, $\|x'_n - y'_n\| > \frac{\epsilon}{b_n}$; al ser el espacio uniformemente convexo, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\left\| \frac{x'_n + y'_n}{2} \right\| \leq 1 - \delta_0,$$

por lo tanto

$$\left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\|^2 \leq (1 - \delta_0)^2 b_n^2.$$

De este último y de (2) obtenemos

$$\frac{1}{2}\|x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_n\|^2 - \frac{1}{n} < (1 - \delta_0)^2 b_n^2,$$

tomando límite cuando $n \to +\infty$ se obtiene $a^2 \leq (1 - \delta_0)^2 a^2$, lo cual es absurdo, pues $0 < \delta \leq 1$ quedando así demostrado el lema. □