Corrección de pueba análisis I

Jonathan Ortiz

6 de enero de 2014

1. Sea (e_n) una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert H, y sea $M = \langle (e_n) \rangle$.

   a) Para cada $x \in H$, pruebe que $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ pertenece a $\overline{M}$.

   Demostración. Sea $x \in H$, voy ha probar que existe $(y_n) \subset M$ tal que $y_n \longrightarrow y$[1]. Tomo $y_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$, por la definición de M, es inmediato que $(y_n) \subset M$. Luego es fácil probar que $y_n \longrightarrow y$, lo que queriamos probar. $\square$

   b) Sea $x \in \overline{M}$, pruebe que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$.

   Demostración. De la caracterización de clausura, existe $(x_n) \subset M$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Por definición de M, $x_n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i_n} e_i$ para $n = 1, 2, \ldots$. Aprovechando la ortonormalidad de (e_n) se obtiene que $x_n = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_n, e_i \rangle e_i$. Entonces:

   $$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_n, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{n \longrightarrow \infty} \langle x_n, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

   Por lo tanto se concluye[2] que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$. $\square$

   c) Deduzca que si (e_n) es total en H, entonces todo elemento de $x \in H$ se puede expresar $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$.

   Demostración. Supongamos que (e_n) es total en H, entonces $\overline{M} = H$. Sea $x \in H$, luego $x \in \overline{M}$, por el literal anterior se concluye que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$, lo que se quería probar. $\square$

[1] Nótese que y existe, gracias a la desigualdad de Bessel y porque H es completo.

[2] El límite puede ingresar a la serie gracias a que esta es absolutamente convergente, además se usó la continuidad del producto escalar.

2. Considero $\mathcal{C}[0,1]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

   a) Pruebe que $\langle f, f\rangle = 0$ implica $f = 0$.

   Demostración. Supongamos que existe $f \in \mathcal{C}[0,1]$,$\langle f, f\rangle = 0$ y $f \neq 0$, vamos a llegar a una contradicción. Entonces $\int_0^1 f^2(t)dt = 0$. Como $f \neq 0$, existe $x \in [0,1]$, tal que $f(x) \neq 0$, entonces $f^2(x) > 0$. Como f es continua, f^2 lo es y[3], existe $r > 0$ tal que $f^2(y) > 0$ para todo $y \in B(x,r)$. Entonces:

$$\int_0^1 f^2(t)dt = \int_0^{x-r} f^2(t)dt + \int_{x-r}^{x+r} f^2(t)dt + \int_{x+r}^1 f^2(t)dt > \int_0^{x-r} f^2(t)dt + \int_{x+r}^1 f^2(t) \geq 0$$

   Por lo tanto $\int_0^1 f^2(t)dt > 0$. □

   b) Si $f_0 : t \longrightarrow 1$, $f_1 : t \longrightarrow t$ y $f_2 : t \longrightarrow t^2$, encuentre un conjunto ortonormal $\langle e_0, e_1, e_2\rangle$ tal que $\langle f_0, f_1, f_2\rangle = \langle e_0, e_1, e_2\rangle$.

   Demostración. Sea $e_0 = f_0$. Por el proceso de Gram-Schmidt se tiene que:

$$\widetilde{e_1}(t) = f_1(t) - \langle f_1(t), 1\rangle = t - \frac{1}{2}.$$

$$e_1(t) = 2\sqrt{3}(t - \frac{1}{2}).$$

$$\widetilde{e_2}(t) = f_2(t) - \langle f_2(t), 1\rangle - \langle f_2(t), e_1(t)\rangle e_1(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}.$$

$$e_2(t) = \frac{30}{\sqrt{5}}(t^2 - t + \frac{1}{6}).$$

□

[3] Teorema de conservación de signo.