Semestre 2019-A Néstor Acevedo

Este material extra se basa en el material realizado por Néstor Acevedo, estudiante de la carrera de Ingeniería Matemática, como tutor de la materia de "Complementos de Cálculo" durante el semestre 2018-A. Además, el material fue revisado por el profesor Andrés Merino

EJERCICIO 1. Sea $y_1 \in \mathbb{R}$ tal que $0 < y_1$. Para $n \geq 2$, se define

$$y_n = \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{y_{n-1}}.$$

Asumiendo que la sucesión $(y_n)_{n\geq 1}$ es convergente, halle su limite.

Demostración. Sea $L \in \mathbb{R}$ el límite de la sucesión. Para determinar el valor de L, utilizaremos el hecho de que

$$y_n = \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{y_{n-1}} \tag{1}$$

para todo $n \geq 2$, con esto, tomando el límite cuando n tiende a infinito en (1), tenemos que

$$L = \frac{1}{2}L + \frac{1}{L},$$

lo que equivale a

$$L^2 = 2,$$

por lo tanto

$$L = \sqrt{2} \qquad \text{o} \qquad L = -\sqrt{2}.$$

Ahora, utilizando inducción se puede demostar fácilmente que

$$y_n > 0$$

para todo $n \geq 1$, por lo tanto, se tiene que $L \geq 0$. Así, se tiene que $L = \sqrt{2}$, es decir,

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \sqrt{2}.$$ □

EJERCICIO 2. Sean $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tales que $y_1 < y_2$. Para $n \geq 3$, se define

$$y_n = \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-2}.$$

> Asumiendo que la sucesión $(y_n)_{n\geq 1}$ es convergente, halle su limite.

Solución. Sea $L \in \mathbb{R}$ el límite de la sucesión. Para determinar el valor de L, una primera idea sería el utilizar el hecho de que

$$y_n = \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-2} \tag{2}$$

para todo $n \geq 3$, con esto, tomando el límite cuando n tiende a infinito en (2), tenemos que

$$L = \frac{1}{3}L + \frac{2}{3}L = L,$$

lo cual no nos dice nada útil acerca del límite, por tanto debemos buscar otra alternativa.

Vamos a intentar buscar un forma no recursiva para el término y_n, con $n \geq 3$ (una manera para realizar esto es aplicando la teoría de Ecuaciones en Diferencial que no es parte de este curso). Para esto, analicemos la diferencia $y_n - y_{n-1}$ con $n \in \mathbb{N}^*$, así, para $n \geq 3$, utilizando (2) nos podemos dar cuenta que

$$y_n - y_{n-1} = \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-2} - y_{n-1} = \frac{2}{3}y_n - \frac{2}{3}y_{n-1} = \frac{2}{3}(y_{n-2} - y_{n-1}). \tag{3}$$

¿Qué podemos hacer ahora? Podemos analizar la diferencia $y_{n-2} - y_{n-1}$ volviendo aplicar lo anterior, así, si $n - 1 \geq 3$, tenemos que

$$y_{n-2} - y_{n-1} = y_{n-2} - \left(\frac{1}{3}y_{n-2} + \frac{2}{3}y_{n-3}\right) = \frac{2}{3}(y_{n-2} - y_{n-3}),$$

de donde, reemplazando en (3) nos queda así:

$$y_n - y_{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 (y_{n-2} - y_{n-3}) = -\left(\frac{2}{3}\right)^2 (y_{n-3} - y_{n-2})$$

Repitiendo este proceso, podemos conjeturar que

$$\begin{aligned}
y_n - y_{n-1} &= \frac{2}{3}(y_{n-2} - y_{n-1}) \\
&= (-1)\left(\frac{2}{3}\right)^2 (y_{n-2} - y_{n-3}) \\
&= (-1)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 (y_{n-4} - y_{n-3}) \\
&\vdots \\
&= (-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} (y_1 - y_2),
\end{aligned}$$

es decir, conjeturamos que, para todo $n \geq 3$, se tiene que

$$y_n = -\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}(y_1 - y_2) + y_{n-1}.$$

Esto se lo puede demostrar fácilmente por inducción. Esta nueva fórmula es muy útil dado que a diferencia de (2), logramos obtener que y_n solo depende del término anterior y no de los dos anteriores. Ahora, aplicando esta fórmula, podemos conjeturar que, para $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}
y_n &= -\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}(y_1 - y_2) + y_{n-1} \\
&= -\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}(y_1 - y_2) - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-3}(y_1 - y_2) + y_{n-2} \\
&\vdots \\
&= -\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}(y_1 - y_2) - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-3}(y_1 - y_2) - \cdots - \left(-\frac{2}{3}\right)(y_1 - y_2) + y_2 \\
&= -\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-3} + \cdots + \left(-\frac{2}{3}\right)\right)(y_1 - y_2) + y_2 \\
&= y_2 - (y_1 - y_2)\sum_{k=1}^{n-2}\left(-\frac{2}{3}\right),
\end{aligned}$$

es decir, conjeturamos que

$$y_n = y_2 - (y_1 - y_2)\sum_{k=1}^{n-2}\left(-\frac{2}{3}\right)$$

para todo $n \geq 3$. De nuevo, esto podemos demostrarlo por inducción. Así, aplicando la fórmula de la suma de los primeros términos de una progresión geométrica, obtenemos que, para $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}
y_n &= y_2 - (y_1 - y_2)\sum_{k=1}^{n-2}\left(-\frac{2}{3}\right) \\
&= y_2 - (y_1 - y_2)\left(\frac{\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)}\right) \\
&= y_2 - \frac{3}{5}(y_1 - y_2)\left(\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Como $\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ tiende a 0 cuando n tiende a infinito, tenemos que:

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = y_2 - \frac{3}{5}(y_1 - y_2)\left(-\frac{2}{3}\right) = y_2 + \frac{2}{5}(y_1 - y_2),$$

o lo que es equivalente a

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \frac{2}{5}y_1 + \frac{3}{5}y_2. \qquad \square$$