Escuela Politécnica Nacional

Alexander Nénjer

15 de agosto de 2014

1. Demostrar que e es un número irracional

Demostración. Suponemos que e es racional, es decir :

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{a}{b} \qquad con \qquad a \in \mathbb{Z} \qquad y \qquad b \in \mathbb{N}$$

Multiplicamos por $b!$, tenemos

$$e\ b! = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b!}{n!} = z \qquad con \qquad z = a(b-1)!\ \in \mathbb{Z}$$

se sigue:

$$e\ b! = \frac{b!}{1} + \frac{b!}{1} + \frac{b!}{2!} + \frac{b!}{3!} + \cdots + \frac{b!}{b!} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)} + \cdots$$

puesto que $\qquad e\ b! \in \mathbb{Z} \qquad$ y $\qquad \left(\frac{b!}{1} + \frac{b!}{1} + \frac{b!}{2!} + \frac{b!}{3!} + \cdots + \frac{b!}{b!} \right) \in \mathbb{Z}$

se concluye que

$$m = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)} + \cdots \in \mathbb{Z} \qquad \text{y} \qquad m > 0$$

como

$$m < \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^n}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+b}} - 1 = \frac{1+b}{b} - 1 = \frac{1}{b}$$

se concluye:

$$0 < m < \frac{1}{b}$$

Esto contradice el hecho de que $m \in \mathbb{N}$, ya que no existe ningún número natural entre 0 y 1, por tanto e es un número irracional.

$\square$

2. Demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (*Serie Armónica*) es divergente.

Demostración. Supongamos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = S \qquad S \in \mathbb{R}$

Veamos a la serie como el límite de la sucesión de sumas parciales

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Luego como la sucesión S_n converge S, entonces la subsucesión S_{2n} también converge S, y por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) = S - S = 0$$

Viéndolo de una manera más explícita:

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

donde efectivamente:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} - S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) = 0$$

Realizamos la siguiente acotaciòn:

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \ veces} = n\,\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

concluimos que $S_{2n} - S_n > \dfrac{1}{2}$, pero esto no puede ser puesto que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$

Por tanto, la serie armónica no es convergente.

$\square$

3. Dadas las siguientes series, verificar y calcular su convergencia:

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n \quad \mathit{con} \quad r < 1$ (Serie Geométrica)

  $i)$ Analicemos la convergencia de la serie utilizando el criterio de la razón

  Para esto calculamos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}}{r^n} = \lim_{n\to\infty} r = r < 1$$

  entonces la serie es absolutamente convergente.

$ii)$ Calculemos ahora su convergencia:

Sabiendo que:

$$(r^{n+1} - 1) = (r - 1)(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n)$$

podemos concluir :

$$(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n) = \frac{r^{n+1} - 1}{(r - 1)}$$

es decir:

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{(r - 1)}$$

luego tomando el límete a ambos lados de la igualdad, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} r^k = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1} - 1}{(r - 1)} = \frac{-1}{(r - 1)} = \frac{1}{(1 - r)}$$

Por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}$$

- $\sum_{n=0}^{\infty} nr^n$ *con* $r < 1$

  $i)$ Veamos que efectivamente esta serie es convergente, utilizando el criterio de la razón:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)r^{(n+1)}}{nr^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)r}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) r = r < 1$$

entonces la serie es absolutamente convergente.

$ii)$ Calculemos ahora su convergencia:

Considerando la siguiente serie y gracias a la convergencia absoluta de la serie geométrica, se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nr^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (r^n)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n\right)' = \left(\frac{1}{1 - r}\right)' = \frac{1}{(1 - r)^2}$$

Multiplicando ambos lados por r

$$r \sum_{n=0}^{\infty} nr^{n-1} = r \frac{1}{(1 - r)^2} = \frac{r}{(1 - r)^2}$$

Por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1 - r)^2}$$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n \qquad \textit{con} \qquad r<1$

  $i)$ Veamos que efectivamente esta serie es convergente, utilizando el criterio de la razón:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 r^{(n+1)}}{n^2 r^n}=\lim_{n\to\infty} r\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = r\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = r\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^2 = r(1)=r<1$$

  entonces la serie es absolutamente convergente.

  $ii)$ Calculemos ahora su convergencia, para esto consideremos la siguiente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)r^{(n-2)}$$

  y por la convergencia absoluta de las series calculadas anteriormente, se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)r^{(n-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(nr^{(n-1)}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} nr^{(n-1)}\right)' = \left(\frac{1}{(1-r)^2}\right)' = \frac{2(1-r)}{(1-r)^4} = \frac{2}{(1-r)^3} \tag{1}$$

  y también:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)r^{(n-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^{(n-2)} - \sum_{n=0}^{\infty} nr^{(n-2)} \tag{2}$$

  De (1) y (2), se sigue:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^{(n-2)} - \sum_{n=0}^{\infty} nr^{(n-2)} = \frac{2}{(1-r)^3}$$

  lo que implica

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^{(n-2)} = \frac{2}{(1-r)^3} + \sum_{n=0}^{\infty} nr^{(n-2)}$$

  multiplicando por r^2 a ambos lados de la igualdad, concluimos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n = \frac{2r^2}{(1-r)^3} + \sum_{n=0}^{\infty} nr^n = \frac{2r^2}{(1-r)^3} + \frac{r}{(1-r)^2} = \frac{2r^2+r(1-r)}{(1-r)^3} = \frac{r^2+r}{(1-r)^3} = \frac{r(r+1)}{(1-r)^3}$$

  Entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n = \frac{r(r+1)}{(1-r)^3}$$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3 r^n \qquad \textit{con} \qquad r<1$

  $i)$ Verificamos que efectivamente converge utilizando el criterio de la razón

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3 r^{(n+1)}}{n^3 r^n} = \lim_{n\to\infty} r\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = r\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = r(1)=r<1$$

  entonces la serie es absolutamente convergente.

$ii)$ Calculemos ahora la convergencia de la serie, para esto consideremos la siguiente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)r^{(n-3)}$$

y por la convergencia absoluta de las series calculadas anteriormente, se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)r^{(n-3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n(n-1)r^{(n-2)}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)r^{(n-2)}\right)' = \left(\frac{2}{(1-r)^3}\right)' = \frac{6(1-r)^2}{(1-r)^6} = \frac{6}{(1-r)^4}$$

es decir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)r^{(n-3)} = \frac{6}{(1-r)^4} \tag{3}$$

y también:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)r^{(n-3)} = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 r^{(n-3)} - \sum_{n=0}^{\infty} 3n^2 r^{(n-3)} + \sum_{n=0}^{\infty} 2nr^{(n-3)} \tag{4}$$

De (3) y (4), se sigue:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 r^{(n-3)} - \sum_{n=0}^{\infty} 3n^2 r^{(n-3)} + \sum_{n=0}^{\infty} 2nr^{(n-3)} = \frac{6}{(1-r)^4}$$

por lo cual implica

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 r^{(n-3)} = \frac{6}{(1-r)^4} + \sum_{n=0}^{\infty} 3n^2 r^{(n-3)} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nr^{(n-3)}$$

multiplicando por r^3 en la igualdad

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 r^n = \frac{6r^3}{(1-r)^4} + 3\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} nr^n$$

por tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 r^n = \frac{6r^3}{(1-r)^4} + \frac{3r(r+1)}{(1-r)^3} - \frac{2r}{(1-r)^2}$$

calculando:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n^3 r^n &= \frac{6r^3 + 3r(r+1)(1-r) - 2r(1-r)^2}{(1-r)^4} \\ &= \frac{6r^3 + 3r - 3r^3 - 2r(1-2r+r^2)}{(1-r)^4} \\ &= \frac{3r^3 + 3r - 2r + 4r^2 - 2r^3}{(1-r)^4} \\ &= \frac{r^3 + 4r^2 + r}{(1-r)^4} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 r^n = \frac{r(r^2+4r+1)}{(1-r)^4}$$