> **Ejercicio 1.** Sea $E$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $W$ un subespacio vectorial no nulo de $E$ y $B_W$ una base de Hamel para $W$. Muestre que $B_W$ puede ser completado a una base de Hamel para $E$.

*Demostración.* Tomemos

$$\mathcal{B} = \{B \subseteq E : B_W \subseteq B \text{ y } B \text{ es un conjunto linealmente independeinte}\}.$$

Este conjunto es no vacío pues $B_W \in \mathcal{B}$; además, es parcialmente ordenado por el orden $\subseteq$. Vamos a probar que cumple la hipótesis del Lema de Zorn.

Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ una cadena. Tomemos

$$M = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C.$$

Se tiene que $M$ es un conjunto linealmente independiente, pues sean $x_1, \ldots, x_n \in M$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0.$$

Tenemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $C_i \in \mathcal{C}$ tales que $x_i \in C_i$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena, podemos tomar $n_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$C_{n_0} = \text{máx}\{C_i : i \in \{1, \ldots, n\}\},$$

donde este máximo es tomado bajo la relación de orden $\subseteq$, por lo tanto, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$

$$x_i \in C_i \subseteq C_{n_0},$$

Como $C_{n_0}$ es un conjunto linealmente independiente, podemos concluir que $\alpha_i = 0$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Por otro lado, $B_W \subset M$; por lo tanto, $M \in \mathcal{B}$. Finalmente, por la forma en la que está definido $M$, se tiene que es una cota superior de $\mathcal{C}$.

Con esto, se puede utilizar el Lema de Zorn, es decir, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B$ es un elemento maximal de $\mathcal{B}$. Por lo tanto, $B$ es linealmente independiente y $B_W \subseteq B$.

Ahora, procederemos a demostrar que $B$ genera a $E$. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $x \in E$ tal que $x$ no pertenece al conjunto generado por $B$. Tomemos

$$\hat{B} = B \cup \{x\},$$

se tiene que $B_W \subseteq \hat{B}$, además, es un conjunto linealmente independiente pues sean $x_1, \ldots, x_n \in \hat{B}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0.$$

Si $x \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, tenemos que $x$ se lo puede expresar como combinación lineal de elementos de $B$, lo cual es contradictorio. Por otro lado, si $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$, se tendría que $x_1, \ldots, x_n \in B$, el cual es un conjunto linealmente independiente, de donde se concluiría que $\alpha_i = 0$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$, por lo tanto $\hat{B} \in \mathcal{B}$ y $B \subseteq \hat{B}$, lo cual también es contradictorio pues $B$ es maximal.

Así, concluimos que $B$ es un base de Hamel la cual completa a $B_W$. $\square$