**EJERCICIO 1.** Demostrar que el conjunto

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \ \wedge \ y > \frac{1}{x} \right\}$$

es convexo.

*Demostración.* Primero, consideremos la función

$$\begin{aligned} f \colon \ ]0, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x}\,; \end{aligned}$$

notemos que, para todo $x \in \,]0, +\infty[$,

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0,$$

por lo tanto, $f$ es una función convexa, de donde, para todo $x_1, x_2 \in \,]0, +\infty[$ y $\alpha \in [0, 1]$, tenemos

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2),$$

es decir

$$\frac{1}{\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2} \leq \alpha \frac{1}{x_1} + (1 - \alpha)\frac{1}{x_2}.$$

Ahora, tomemos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ y $\alpha \in [0, 1]$, vamos a demostrar que

$$\alpha(x_1, y_1) + (1 - \alpha)(x_2, y_2) \in A.$$

Como $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$, entonces

$$x_1 > 0 \ \wedge \ y_1 > \frac{1}{x_1} \qquad \text{y} \qquad x_2 > 0 \ \wedge \ y_2 > \frac{1}{x_2}\,;$$

por lo tanto,

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 > 0$$

y utilizando el hecho de que $f$ es convexa, tenemos

$$\alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2 > \alpha \frac{1}{x_1} + (1 - \alpha)\frac{1}{x_2} \geq \frac{1}{\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2}.$$

Así, se tiene que

$$\big(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \,,\, \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2\big) \in A,$$

con lo cual, concluimos que $\alpha(x_1, y_1) + (1 - \alpha)(x_2, y_2) \in A$, por ende, $A$ es convexo. □