Semestre 2019-A — Daniel Lara

Este material extra fue elaborado por Daniel Lara, estudiante de la materia "Cálculo Vectorial" de la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2019-A y revisado por el profesor Andrés Merino.

1. INTEGRALES ITERADAS

EJERCICIO 1. Calcule el valor de la siguiente integral

$$\int_0^3 \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+y^2}\, dy\, dx.$$

Solución. Consideremos por un momento $x \in \mathbb{R}$ constante, vamos a calcular primero

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+y^2}\, dy.$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+y^2}\, dy &= x^2 \arctan(y)\Big|_0^{+\infty} \\
&= x^2 \lim_{t\to+\infty} (\arctan(y) - \arctan(0)) \\
&= x^2 \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \\
&= \frac{\pi x^2}{2}.
\end{aligned}$$

Ahora, calculemos

$$\int_0^3 \frac{\pi x^2}{2}\, dx,$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} \int_0^3 x^2 dx &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 \right) \\
&= \frac{9\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Con esto, tenemos que

$$\int_0^3 \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+y^2}\, dy\, dx = \int_0^3 \frac{\pi x^2}{2}\, dx = \frac{9\pi}{2}. \qquad \square$$

EJERCICIO 2. Calcule el valor de la siguiente integral

$$\int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{xy}\, dx\, dy.$$

Solución. Consideremos por un momento $y \geq 1$ constante, vamos a calcular primero

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{xy}\, dx.$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{xy}\, dx &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{xy}\, dx \\ &= \frac{1}{y}\left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx\right) \\ &= \frac{1}{y}\left(\lim_{t\to+\infty} (\ln(t) - \ln(1))\right) \\ &= +\infty,\end{aligned}$$

es decir, esta integral diverge, por lo tato la integral

$$\int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{xy}\, dx\, dy,$$

es divergente. $\square$

2. INTEGRALES DOBLES

EJERCICIO 3. Dado el campo escalar

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) \end{aligned}$$

y la región

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\},$$

calcule la integral doble
$$\iint_R f\, dA.$$

Solución. Dado que la función f es el producto de funciones continuas, se tiene que f es continua en $\mathbb{R}^2$; en particular f es continua en R, de donde
$$\iint_R f\, dA$$
existe. Graficando la región R, tenemos la Figura 1.

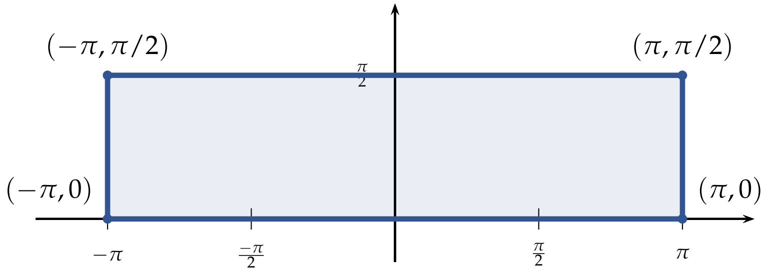

Figura 1: Región $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$.

Ahora, por el Teorema de Fubini, se tiene que
$$\iint_R f\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\,(x)\,\text{sen}\,(y)\, dx\, dy.$$

Con esto, calculamos la integral iterada:
$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\,(x)\,\text{sen}\,(y)\, dx\, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(y) \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(x)\, dx\, dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(y) \left(-\cos\,(x)|_{-\pi}^{\pi} \right)\, dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(y) \left(-\left(\cos(\pi) - \cos\,(-\pi)\right) \right)\, dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\, dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto
$$\iint_R f\, dA = 0.$$
□

EJERCICIO 4. Dado el campo escalar

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$$

y la región R del sector circular en el primer cuadrante acotado por las curvas de ecuación

$$y = \sqrt{25 - x^2}, \qquad 3x - 4y = 0, \qquad x = 0 \qquad \text{y} \qquad y = 0,$$

calcule la integral doble

$$\iint_R f \, dA.$$

Solución. Dado que la función f es una función polinomial, se tiene que f es continua en $\mathbb{R}^2$. En particular f es continua en R, de donde

$$\iint_R f \, dA$$

existe. Ahora, notemos que la región R sobre la cual se va a integrar la función f es el área sombreada de la Figura2.

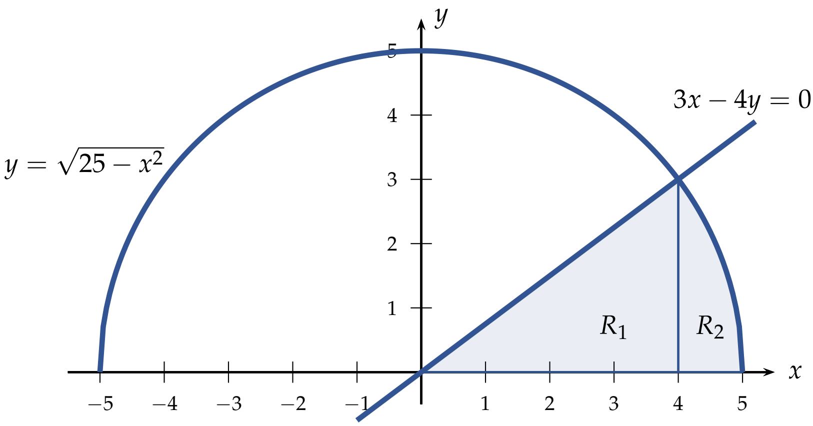

Figura 2: Región R descompuesta en R_1 y R_2.

De esta manera, es fácil ver que podemos expresar la región R como la unión de dos regiones, es decir,

$$R = R_1 \cup R_2,$$

donde

$$R_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq 3x/4 \right\}$$

y

$$R_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x \leq 5 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq \sqrt{25 - x^2} \right\}.$$

Como R_1 y R_2 está expresadas como regiones del tipo I. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\iint_R f\,dA &= \iint_{R_1} f\,dA + \iint_{R_2} f\,dA \\
&= \int_0^4 \int_0^{\frac{3x}{4}} x\,dy\,dx + \int_4^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} x\,dy\,dx.
\end{aligned}$$

Calculamos la primera integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \int_0^{\frac{3x}{4}} x\,dy\,dx &= \int_0^4 xy\Big|_0^{\frac{3x}{4}} dx \\
&= \int_0^4 \frac{3x^2}{4} dx \\
&= \frac{x^3}{4}\Big|_0^4 \\
&= 16.
\end{aligned}$$

Por otra parte, para la segunda integral se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_4^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} x\,dy\,dx &= \int_4^5 xy\Big|_0^{\sqrt{25-x^2}} dx \\
&= \int_4^5 x\sqrt{25 - x^2}\,dx,
\end{aligned}$$

para resolver la integral , aplicando el siguiente cambio de variable

$$u = 25 - x^2 \qquad \text{y} \qquad du = -2x\,dx,$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_4^5 \sqrt{25 - x^2} x\,dx &= -\frac{1}{2} \int_9^0 \sqrt{u}\,du \\
&= \frac{1}{2} \int_0^9 \sqrt{u} du \\
&= \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^9 \\
&= 9.
\end{aligned}$$

Así, se tiene que

$$\begin{aligned}\iint_R f\,dA &= \int_0^4 \int_0^{\frac{3x}{4}} x\,dy\,dx + \int_4^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} x\ \ dy\,dx \\ &= 16+9 \\ &= 25. \end{aligned}$$

□

3. Integrales Triples

Ejercicio 5. Sea A el sólido ubicado en el primer octante y acotado por los planos coordenados y el plano de ecuación

$$z = 5 - x - y.$$

Plantee una integral triple para calcular el volumen del sólido A.

Solución. Para determinar un planteo adecuado para el volumen, consideremos la Figura 3 que ilustra la forma del sólido A.

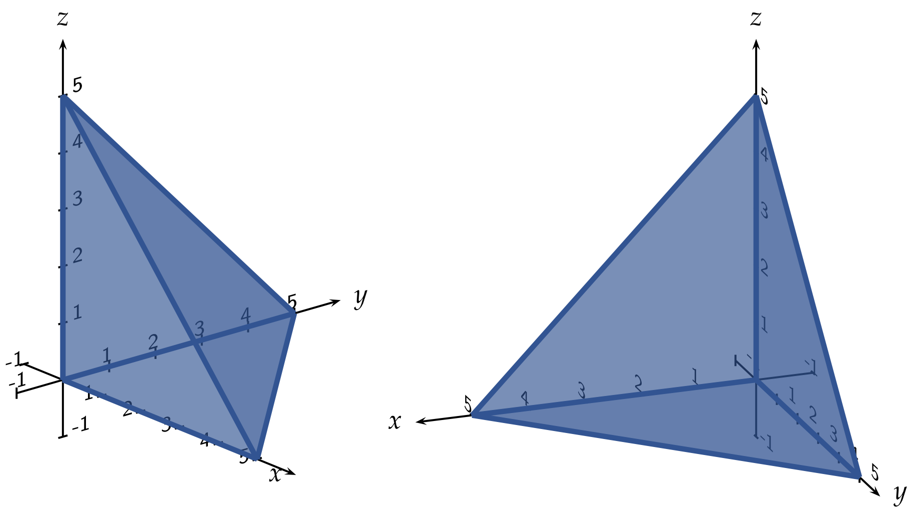

Figura 3: Gráfica del sólido A.
Para una vista en tres dimensiones visitar `https://ggbm.at/jvbxzbae`.

Es claro que, el sólido A se encuentra acotado por los planos de ecuación

$$z = 0 \qquad \text{y} \qquad z = 5 - x - y$$

inferior y superiormente, respectivamente. Así, tenemos que si $(x, y, z) \in A$, entonces

$$0 \leq z \leq 5 - x - y.$$

Por otra parte, si observamos únicamente el plano xy, se tiene el gráfico de la Figura 4.

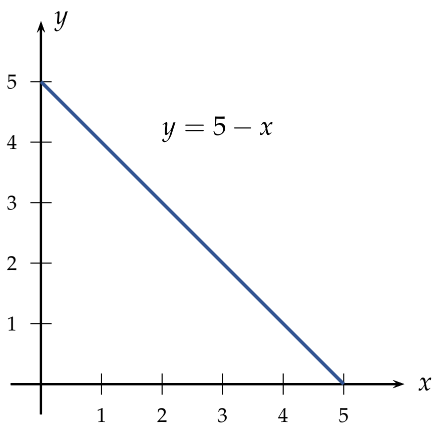

Figura 4: Proyección del plano π sobre el plano xy

De esta manera, tenemos que si $(x, y, z) \in A$ y $z = 0$, entonces

$$0 \leq x \leq 5 \qquad \text{y} \qquad 0 \leq y \leq 5 - x.$$

Por lo tanto,

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 5 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq 5 - x \quad \wedge \quad 0 \leq z \leq 5 - x - y\}.$$

Así, dado que el volumen de en sólido está dado por

$$\iiint_A 1 \, dV,$$

tenemos que el volumen de A está dado por

$$\int_0^5 \int_0^{5-x} \int_0^{5-x-y} 1 \, dz \, dy \, dz. \qquad \square$$