EJERCICIO 1. Sean E y F espacios normados y $T\colon E \to F$ un operador lineal cerrado. Si F es compacto, demuestre que T es acotado.

Demostración. Primero, notemos que demostrar que T es acotado es equivalente a demostrar que T es continua en 0. Con esto en mente, por reducción al absurdo, supongamos que T no es continua en 0, por lo tanto, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 pero $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $T(0) = 0$.

Como $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a 0, existe una subsucesión $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que ninguna subsucesión de $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Por otro lado, como $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en F y F es compacto, entonces posee una subsucesión convergente, es decir, existen $\left(Tx_{n_{k_m}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ y $y \in F$ tal que

$$Tx_{n_{k_m}} \to y$$

cuando $m \to +\infty$. Con esto, tenemos que

$$\left(x_{n_{k_m}}\,,\, Tx_{n_{k_m}}\right) \to (0, y)$$

cuando $m \to +\infty$. Además, como T es cerrado (ver definición al final), se tiene que $y = T(0)$, y como T es lineal, $y = 0$, de donde, se concluye que $\left(Tx_{n_{k_m}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge a 0, lo cual es contradictorio.

Así, queda demostrado que T es continuo en 0 y, por lo tanto, acotado. $\square$

DEFINICIÓN 1

Sean E y F espacios normados y $T\colon E \to F$ un operador lineal. Decimos que T es un *cerrado* si T, visto como subconjunto de $E \times F$ es cerrado en $E \times F$.