Julio de 2021 Jonathan Ortiz

¿Cuántos términos tiene el desarrollo de la potencia n de k términos? Es decir, al desarrollar

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n,$$

¿cuántos términos aparecen?

Para responder esta pregunta es preciso expresar de forma exacta la pregunta.

EJERCICIO 1. Dados $n, k \in \mathbb{Z}^+$ y $a_0, a_1, \ldots, a_m$ variables distintas, determinar el número de términos que tiene el desarrollo de

$$\left(\sum_{m=0}^{k} a_m\right)^n.$$

Solución. Para que el análisis sea más sencillo, vamos a nombrar el número de términos de la expansión en función del número de términos y de la potencia: sea $T(k,n)$ el número de términos del desarrollo del enunciado. De la definición de T, es claro que $T(0,n) = 1$ y, por el teorema del binomio, $T(1,n) = n+1$. Ahora bien, la idea, es utilizar esta última fórmula para ir construyendo la formula para $k = 2,\ 3,\ \ldots$

- Si $k = 2$, notemos que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{m=0}^{k} a_m\right)^n &= (a_0 + a_1 + a_2)^n \qquad (1)\\
&= [a_0 + (a_1 + a_2)]^n \\
&= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a_0^{n-m} (a_1 + a_2)^m \\
&= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a_0^{n-m} \left[\sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} a_1^{m-l} a_2^{l}\right],
\end{aligned}$$

  en donde se han usado dos veces el teorema del Binomio de Newton. Notemos que la sumatoria interna tiene $m+1$ términos y que además las potencia de a_0 hace que no existan dos términos semejantes en el desarrollo de la primera sumatoria. Por este razonamiento, se tiene que la cantidad de términos de (1) es

$$\sum_{m=0}^{n}(m+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = T(2,n).$$

Por cálculo directo, se tiene que $T(2,2) = 6$ y $T(2,3) = 10$; lo que coincide con

$$(a_0 + a_1 + a_2)^2 = 2a_0a_1 + 2a_0a_2 + 2a_1a_2 + a_0^2 + a_1^2 + a_2^2$$

que tiene 6 términos; y

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1 + a_2)^3 &= a_0^3 + 3a_1a_0^2 + 3a_2a_0^2 + 3a_1^2a_0 + 3a_2^2a_0 \\ &\quad + 6a_1a_2a_0 + a_1^3 + a_2^3 + 3a_1a_2^2 + 3a_1^2a_2\end{aligned}$$

que tiene 10 términos.

- Si $k = 3$, notemos que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{m=0}^{k} a_m\right)^n &= (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)^n \\ &= [a_0 + (a_1 + a_2 + a_3)]^n \\ &= \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m} a_0^{n-m}(a_1 + a_2 + a_3)^m.\end{aligned}$$

Notemos que la potencia interna, por el caso anterior, tiene $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ términos y que además, como en el caso anterior, las potencia de a_0 hace que no existan dos términos semejantes en el desarrollo de la sumatoria. Por este razonamiento, se tiene que la cantidad de términos de esta expresión es

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{(m+1)(m+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} = T(3,n),$$

en donde se utilizó fórmulas de la sumatoria. Por cálculo directo, se tiene que $T(3,3) = 20$, lo que coincide con

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1 + a_2 + a_3)^3 &= a_0^3 + 3a_1a_0^2 + 3a_2a_0^2 + 3a_3a_0^2 + 3a_1^2a_0 \\ &\quad + 3a_2^2a_0 + 3a_3^2a_0 + 6a_1a_2a_0 + 6a_1a_3a_0 + 6a_2a_3a_0 \\ &\quad + a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + 3a_1a_2^2 + 3a_1a_3^2 \\ &\quad + 3a_2a_3^2 + 3a_1^2a_2 + 3a_1^2a_3 + 3a_2^2a_3 + 6a_1a_2a_3\end{aligned}$$

que tiene 20 términos.

Como se ve en el análisis de los casos para $k = 2$ y $k = 3$, es razonable pensar que

$$\begin{aligned} T(4,n) &= \sum_{m=0}^{n} \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{24}. \end{aligned}$$

Se puede comprobar que

$$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^3$$

tiene $T(4,3) = 35$ términos.

Claramente esto no nos permite deducir que esta fórmula se cumple en general, afortunadamente disponemos de la herramienta ideal para estos casos:

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Para utilizar Inducción Matemática, primero debemos presentar una fórmula explícita para $T(k,n)$ dependiente solo de k y de n. Por el análisis anterior, se tiene que para $n \in \mathbb{Z}^+$,

k	Términos
1	$n+1$
2	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$
3	$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3}$
4	$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$

Se puede observar que el denominador sigue la secuencia del factorial y, además, que los productos en el numerador siguen la forma $(n+1)(n+2)\cdots(n+k)$. Así, se postula que

$$T(k,n) = \frac{(n+1)\cdots(n+k)}{k!} = \frac{(n+k)!}{n!\,k!} \tag{2}$$

para todo $n, k \in \mathbb{Z}^+$.

Para demostrar que esta fórmula se cumple, notemos que, por el análisis anterior, dado $n, k \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que

$$T(k,n) = \sum_{m=0}^{n} T(k-1,m),$$

utilizando el postulado (2), se sigue que lo que debemos probar es

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{(m+(k-1))!}{m!\,(k-1)!} = \frac{(n+k)!}{n!\,k!}$$

para todo $n, k \in \mathbb{Z}^+$.

Fijado $k \in \mathbb{Z}^+$, se va a utilizar inducción sobre $n \in \mathbb{Z}^+$. La base inductiva se cumple por las comprobaciones anteriores. Ahora bien, suponiendo que se cumple la fórmula para n, vamos a demostrar que

$$\sum_{m=0}^{n+1} \frac{(m+(k-1))!}{m!\,(k-1)!} = \frac{((n+1)+k)!}{(n+1)!\,k!}.$$

Dado que

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{n+1} \frac{(m+(k-1))!}{m!\,(k-1)!} &= \sum_{m=0}^{n} \frac{(m+(k-1))!}{m!\,(k-1)!} + \frac{((n+1)+(k-1))!}{(n+1)!\,(k-1)!} \\
&= \frac{(n+k)!}{n!\,k!} + \frac{((n+1)+(k-1))!}{(n+1)!\,(k-1)!} \\
&= \frac{(n+k)!}{n!(k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{((n+1)+k)!}{(n+1)!\,k!}
\end{aligned}$$

lo que demuestra lo que queríamos probar.

Con esto está demostrado que, para todo $n, k \in \mathbb{Z}^+$ la cantidad de términos del desarrollo de

$$\left(\sum_{m=0}^{k} a_m\right)^n$$

es

$$T(k,n) = \frac{(n+k)!}{n!\,k!}. \qquad \square$$