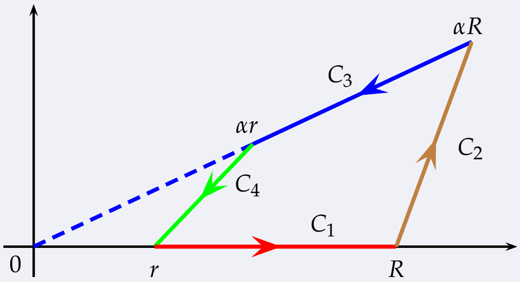
Ejercicio 1. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(\alpha) > 1$. Para demostrar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-\alpha t}}{t} \, dt = \operatorname{Log}(\alpha).$$

vamos a calcular

$$\int_C \frac{e^{-z}}{z} \, dz,$$

donde C es la curva dada por la unión de C_1, C_2, C_3 y C_4 dadas por la siguiente gráfica



en la cual se considera $r, R > 0$ tales que $r < |\alpha| < R$. Para esto, siga los siguientes pasos:

1. Calcule
$$\int_C \frac{e^{-z}}{z} \, dz.$$
2. Evalúe y simplifique la expresión
$$\int_{C_1} \frac{e^{-z}}{z} \, dz + \int_{C_3} \frac{e^{-z}}{z} \, dz.$$
3. Evalúe el límite
$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_2} \frac{e^{-z}}{z} \, dz.$$
4. Evalúe el límite
$$\lim_{r \to 0} \int_{C_4} \frac{e^{-z}}{z} \, dz.$$
5. Deduzca la fórmula que se quería demostrar.

Recuerde que una parametrización del segmento que une $A, B \in \mathbb{C}$ es

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto A + t(B - A). \end{aligned}$$

Solución.

1. Dado que la función definida por $z \mapsto \dfrac{e^{-z}}{z}$ es analítica en C, junto con su interior, se tiene que

$$\int_C \frac{e^{-z}}{z} \, dz = 0.$$

2. Una parametrización de C_1 es
$$\begin{aligned}\gamma_1\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C}\\ t &\longmapsto r+t(R-r),\end{aligned}$$
entonces
$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{C_1} \frac{e^{-z}}{z}\,dz\\ &= \int_0^1 \frac{\exp\left(-r-t(R-r)\right)}{r+t(R-r)}(R-r)\,dt\\ &= \int_r^R \frac{\exp(-u)}{u}\,du\\ &= \int_r^R \frac{e^{-u}}{u}\,du,\end{aligned}$$
en donde en la tercera igualdad se utilizó el cambio de variable $u = r+t(R-r)$. Por otro lado, una parametrización de C_3 es
$$\begin{aligned}\gamma_3\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C}\\ t &\longmapsto \alpha R+t(\alpha r-\alpha R),\end{aligned}$$
entonces
$$\begin{aligned}I_3 &= \int_{C_3} \frac{e^{-z}}{z}\,dz\\ &= \int_0^1 \frac{\exp\left(-\alpha R-t(\alpha r-\alpha R)\right)}{\alpha R+t(\alpha r-\alpha R)}(\alpha r-\alpha R)\,dt\\ &= \int_0^1 \frac{\exp^{\alpha}\left(-R-t(r-R)\right)}{R+t(r-R)}(r-R)\,dt\\ &= -\int_r^R \frac{\exp^{\alpha}(-u)}{u}\,du\\ &= -\int_r^R \frac{e^{-\alpha u}}{u}\,du,\end{aligned}$$
en donde en la cuarta igualdad se utilizó el cambio de variable $u = R+t(r-R)$. Por lo tanto, se tiene que
$$I_1+I_3 = \int_r^R \frac{e^{-u}-e^{-\alpha u}}{u}\,du = \int_r^R \frac{e^{-t}-e^{-\alpha t}}{t}\,dt,$$
dado que la variable u es muda y puede reemplazarse por cualquier otra.

3. Vamos a acotar esta integral, por la desigualdad triangular,
$$\begin{aligned}|I_2| &\leq \int_{C_2} \frac{|e^{-z}|}{|z|}|dz|\\ &\leq \int_{C_2} \frac{e^{-x}}{|z|}|dz|\\ &\leq \int_{C_2} \frac{e^{-R}}{R}|dz|\\ &= \frac{e^{-R}}{R}|\alpha R-R|\\ &= e^{-R}|\alpha-1|,\end{aligned}$$
tomando el límite cuando $R \to +\infty$, se tiene que
$$I_2 = 0.$$

4. Una parametrización de C_4 es

$$\begin{aligned} \gamma_4 \colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \alpha r + t(r - \alpha r), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{C_4} \frac{e^{-z}}{z}\, dz \\ &= \int_0^1 \frac{\exp\left(-\alpha r - t(r-\alpha r)\right)}{\alpha r + t(r - \alpha r)} (r - \alpha r)\, dt \\ &= \int_0^1 \frac{\exp^r\left(-\alpha - t(1-\alpha)\right)}{\alpha + t(1-\alpha)} (1-\alpha)\, dt \\ &= (1-\alpha) \int_0^1 \frac{\exp^r\left(-\alpha - t(1-\alpha)\right)}{\alpha + t(1-\alpha)}\, dt. \end{aligned}$$

Ahora bien, para $0 < r < 1$ y cada $0 < t < 1$,

$$\left| \frac{\exp^r\left(-\alpha - t(1-\alpha)\right)}{\alpha + t(1-\alpha)} \right| = \frac{\exp^r\left(-\operatorname{Re}(\alpha) - t(1 - \operatorname{Re}(\alpha))\right)}{|\alpha + t(1-\alpha|)} \leq \frac{e^{-r}}{|\alpha + t(1-\alpha)|},$$

pues $-\operatorname{Re}(\alpha) - t(1-\operatorname{Re}(\alpha)) < -1$. Como $\dfrac{e^{-r}}{|\alpha + t(1-\alpha)|}$ es integrable en $[0,1]$, por ser continua; por el Teorema de Convergencia Dominada, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} I_4 &= (1-\alpha) \int_0^1 \lim_{r \to 0} \frac{\exp^r\left(-\alpha - t(1-\alpha)\right)}{\alpha + t(1-\alpha)}\, dt \\ &= (1-\alpha) \int_0^1 \frac{1}{\alpha + t(1-\alpha)}\, dt \\ &= \operatorname{Log}(\alpha + t(1-\alpha))\Big|_0^1 \\ &= -\operatorname{Log}(\alpha). \end{aligned}$$

5. Por el numeral 1, se tiene que

$$\lim_{(r,R)\to(0,+\infty)} I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0,$$

ahora, por los numerales 2, 3 y 4; se sigue que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-\alpha t}}{t}\, dt + (-\operatorname{Log}(\alpha)) = 0,$$

de donde

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-\alpha t}}{t}\, dt = \operatorname{Log}(\alpha). \qquad \square$$