Materia Análisis Real
Tema
Hoja 1 de

Límites de sucesiones

Decimos que una sucesión de números reales $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente a un $x^*\in\mathbb{R}$ si para cada $\varepsilon>0$ existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$|x_k - x_*|<\varepsilon \qquad \forall k\geq k_0$$

Propiedad arquimediana

Dados dos números $a,b>0$ existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $a<kb$.

Ejemplo

Probemos

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}$$

Usamos $x_*=\lim_{k\to+\infty} x_k$

Sea $\varepsilon>0$, cualquiera. Debemos hallar $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{1}{k}-0\right|<\varepsilon \qquad \forall k\geq k_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k}<\varepsilon$$

$$\Rightarrow 1<k\varepsilon$$

Usando la propiedad arquimediana entre 1 y ε, sabemos que existe $\omega\in\mathbb{N}$ tal que

$$1<\omega\varepsilon \qquad (4)$$

Ahora, cuando $k\in\mathbb{N}$ es tal que $k\geq\omega$, se tiene que

$$\frac{1}{k}\leq\frac{1}{\omega} \qquad (5)$$

combinando (4) y (5), tenenemos que

$$\frac{1}{k}<\varepsilon \qquad \forall k\geq\omega,$$

tomando $k_0=\omega$ y como $\varepsilon>0$, es arbitrario se sigue que

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}=0$$

Ejemplo

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}=0$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{k}}-0\right|=\frac{1}{\sqrt{k}}<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 1<\sqrt{k}\,\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 1<\varepsilon^2 k$$

Sea $\varepsilon>0$, cualquiera. Por la propiedad Arquimediana entre ε^2 y 1, sabemos que existe $\omega\in\mathbb{N}$, tal que

$$1<\omega k^2.$$

Así,

$$1<\omega\varepsilon^2\leq k\varepsilon^2 \qquad \forall k\geq\omega$$

$$\Rightarrow 1<\sqrt{k}\,|\varepsilon|=\sqrt{k}\,\varepsilon \qquad \forall k\geq\omega$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{k}}=\left|\frac{1}{\sqrt{k}}-0\right|<\varepsilon \qquad \forall k\geq k_0,$$

donde $k_0:=\omega\in\mathbb{N}$

Nota: Recordemos que cuando una sucesión de números reales es convergente, posee un único límite. Puede usarse como criterio de convergencia

Ejemplo Sea $x=((-1)^k)_{k\in\mathbb{N}}$

Esta sucesión no es convergente

P.D. $\exists\varepsilon>0$ tal que $\forall k\in\mathbb{N}$

$$|x_k-x_*|\geq\varepsilon,$$

luego, como $x_*\in\mathbb{R}$

$$|x_k-x_*|\leq|x_k|+|x_*|=|(-1)^k|+|x_*|$$
$$=1+|x_*| \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

$$|x_k-x_*|\geq\big||x_k|-|x_*|\big|$$
$$=\big|1-|x_*|\big| \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

¡pendiente!

Álgebra de sucesiones

Denotemos $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las sucesiones convergentes de números reales. Sobre $\mathcal{C}$ se puede definir dos operaciones:

[Suma]

Para todo $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $y=(y_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{C}$, se define

$$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}+(y_k)_{k\in\mathbb{N}}:=(x_k+y_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

[Producto Escalar]

Para todo $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{C}$ y $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\alpha x=\alpha(x_k)_{k\in\mathbb{N}}=(\alpha x_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

Estas dos operaciones están bien definidas, pues sabemos que si $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $y=(y_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{C}$, con $x_*, y_*\in\mathbb{R}$ los límites de x e y, respectivamente, se tiene que

$$\lim_{k\to+\infty}(x_k+y_k)=x_*+y_*=\lim_{k\to+\infty}x_k+\lim_{k\to+\infty}y_k$$

$$\lim_{k\to+\infty}(\alpha k)=\alpha\lim_{k\to+\infty}x_k=\alpha x_*$$

No es difícil demostrar que $\mathcal{C}$ es un espacio vectorial real.

Sucesiones acotadas.

Consideremos $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada, cuando existe $M>0$ tal que

$$|x_k|\leq M \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

Lema (0.1)
Toda sucesión convergente es acotado.

Demostración
Sea $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales convergente a $x_*\in\mathbb{R}$

Así, sabemos que existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$|x_k-x_*|<1 \qquad \forall k\geq k_0$$

Además, de la desigualdad triangular, se tiene que

$$||x_k|-|x_*|| \le |x_k - x_*|$$

$$|x_k|-|x_*| \le ||x_k|-|x_*|| \le |x_k-x_*| < 1$$

$\forall k\ge k_0$.

Así,

$$|x_k| < 1+|x_*| \qquad \forall k \ge k_0$$

Ahora, consideremos

$$M = \max\{|x_1|,\dots,|x_{k_0-1}|, 1+|x_*|\}$$

con lo cual

$$|x_k|\le M \qquad \forall k=1,\dots,k_{0-1}$$

y también

$$|x_k|\le 1+|x_*|\le M \qquad \forall k\ge k_0$$

Por tanto, $|x_k|\le M$ $\forall k\in\mathbb{N}$, lo que prueba que x es acotado.

Proposición

~~Sea x =~~

2/10/2019.

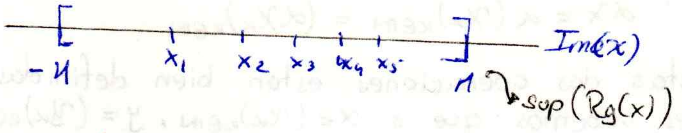
Lema (Monotonía y convergencia)

Sea $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq$. Si x es acotada y monótona, entonces es convergente.

x es acotada $\Leftrightarrow Rg(x)\subseteq\mathbb{R}$ es acotado.

$\Leftrightarrow \exists M>0$ tal que $|x_k|\le M$ $\forall k\in\mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \exists M>0$ tal que $x_k\in[-M,M]$ $\forall k\in\mathbb{N}$



Demostración

Supongamos que $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente. Como x es acotada, entonces $Rg(x)\subseteq\mathbb{R}$ es acotado (existe ínfimo y supremo). Así, existe

$$x_* := \sup(Rg(x)),$$

vamos a probar que $\lim_{k\to+\infty} x_k = x_*$. Sea $\varepsilon>0$ arbitrario pero fijo, por la caracterización de supremo existe $\gamma\in\mathbb{N}$ tal que

$$x_*-\varepsilon < x_\gamma.$$

Además, como x es creciente $x_\gamma\le x_k$ $\forall k\ge\gamma$. Por tanto

$$x_*-\varepsilon<x_\gamma\le x_k\le x_* < x_*+\varepsilon$$

y así, x_k

$$|x_k-x_*|<\varepsilon \qquad \forall k\ge k_0$$

con $k_0=\gamma$, como ε es arbitrario, entonces hemos probado que

$$x_*=\lim_{k\to+\infty} x_k$$

Puntos de acumulación

Dados $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ y $x_*\in\mathbb{R}$, decimos que x_* es un punto de acumulación de x cuando existe una subsucesión de x convergente a x_*

Teorema (Bolzano - Weierstrass) (1874)

Toda sucesión acotada de números reales admite punto de acumulación

Demostración

Sea $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ acotada, cualquiera. Por lo tanto existe $M>0$ tal que

$$-M\le x_k\le M \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

Consideremos el conjunto

$$X := \{t\in\mathbb{R} : t<x_k \text{ para una cantidad infinita de naturales } k\in\mathbb{N}\}$$

el cual es no vacío pues al menos $-M\in X$. Notemos que

$$x_k\le M \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

así

$$t<M \qquad \forall t\in X$$

Esto nos indica que M es una cota superior de X, así, existe $\xi\in\mathbb{R}$ tal que

$$\xi := \sup X$$

Sea $\varepsilon>0$, cualquiera. Como ξ es el supremo de X, vemos que

$$\xi+\varepsilon\notin X,$$

así existe $N\subseteq\mathbb{N}$ finito o vacío tal que

(1) $\quad \xi+\varepsilon<x_k \qquad \forall k\in N$

Por otro lado, sabemos que existe $t\in X$ tal que

(2) $\quad \xi-\varepsilon<t<x_k$ para una cantidad finita de $k\in\mathbb{N}$

Como ε es arbitrario, hemos probado que para todo $\varepsilon>0$

$$I_\varepsilon = [\xi-\varepsilon, \varepsilon+\varepsilon]$$ (Ver (1), (2))

tiene infinitos términos de la sucesión x.

Vamos a construir una subsucesión de x convergente a ξ

- ~~Para~~ $\varepsilon=1$, tomamos cualquier término de x en el intervalo I_1 al cual llamamos $x_{\varphi(1)}\in Rg(x)$ donde $\varphi(1)\in\mathbb{N}$,
- Para $\varepsilon=1/2$, tomamos un término de x en el intervalo $I_{1/2}$, al cual llamamos $x_{\varphi(2)}\in Rg(x)$, tal que

$$\varphi(1)<\varphi(2)$$

el cual existe pues I_2 posee infinitos términos de la sucesión

Materia: Análisis Real
Tema: Sucesiones
Hoja: 2 de

• Para $\varepsilon = 1/3$, tomamos un término de x en el intervalo $I_{1/3}$, al cual llamamos $x_{\varphi(3)} \in Rg(x)$, tal que $\varphi(1)<\varphi(2)<\varphi(3)$, el cual existe pues $I_{1/3}$ posee infinitos términos de la sucesión.

→ Dado cualquier $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, para $\varepsilon = 1/k$ tomamos un término de la sucesión x al cual llamamos $x_{\varphi(k)} \in Rg(x)$ tal que

$$\varphi(k-1) < \varphi(k)$$

Así, obtenemos una subsucesión $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, tal que

• $x_{\varphi(k)} \in I_{1/k} \quad \forall k\in\mathbb{N}$

$$\iff \xi - \frac{1}{k} \leq x_{\varphi(k)} \leq \xi + \frac{1}{k} \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

$$\iff \left| x_{\varphi(k)} - \xi \right| \leq \frac{1}{k} \quad \forall k\in\mathbb{N} \qquad (3)$$

$\cancel{\iff}$

Sea $\varepsilon>0$ cualquiera. Sabemos que existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{k} < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0$$

que junto con (3) permite obtener

$$\left| x_{\varphi(k)} - \xi \right| < \varepsilon \qquad \forall k\geq 0,$$

como ε es arbitrario, se sigue que ξ

$$\xi = \lim_{k\to+\infty} x_{\varphi(k)},$$

así, ξ es un punto de acumulación de x

Definición

Sea $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, acotada. Al punto de acumulación de x ~~le llamamos~~ (más pequeño), de x le llamamos límite inferior de la sucesión x y escribimos $\liminf_{k\to+\infty} x_k$. En cambio, al más grande de los puntos de acumulación le llamamos límite superior de x y escribimos

$$\limsup_{k\to\infty} x_k$$

Ejemplo

Consideremos la sucesión

$$x = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \dots\right)$$

$$= (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

~~vemos que~~
~~$k\in\mathbb{N}$ por~~

Consideremos las funciones

$$\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$k \longmapsto \varphi(k)=2k-1$$

$$\theta: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$k \longmapsto \theta(k)=2k$$

Sea $y=(\frac{1}{k})_{k\in\mathbb{N}}$, tenemos que

$$y\circ\varphi = \left(\frac{1}{2k-1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

$$y\circ\theta = \left(\frac{1}{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

Consideremos la sucesión

$$x = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots\right)$$

Así

$$x_1 = \frac{1}{1+1}, \quad x_4 = \frac{2}{2+1}, \quad x_7 = \frac{3}{3+1}$$

$$x_2 = \frac{1}{2\cdot1-1}, \quad x_5 = \frac{1}{2\cdot2-1}, \quad x_8 = \frac{1}{2(3)-1}$$

$$x_3 = \frac{1}{2\cdot1}, \quad x_6 = \frac{1}{2\cdot2}, \quad x_9 = \frac{1}{2\cdot3}$$

$$x_{3k} = \frac{1}{2k} \qquad k\in\mathbb{N}$$

$$x_{3k-1} = \frac{1}{2k-1}, \quad k\in\mathbb{N}$$

$$x_{3k-2} = \frac{k}{k+1} \qquad k\in\mathbb{N}$$

la sucesión posee 3 subsucesiones

$$\left(\frac{1}{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}, \quad \left(\frac{1}{2k-1}\right)_{k\in\mathbb{N}}, \quad \left(\frac{k}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

cualquier otra subsucesión convergente, será subsucesión de las antes mencionadas. Los puntos de acumulación son 0 y 1.

$$\limsup_{k\to+\infty} x_k = 1 \qquad \liminf_{k\to+\infty} x_k = 0.$$

Series.

Consideremos una sucesión $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$

Para cada $n\in\mathbb{N}$, definimos

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$$

y llamamos a la sucesión $s:=(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la serie generada por x, y al n-ésimo término de s le llamamos la n-ésima suma parcial generada por x

Cuando existe $s_* \in \mathbb{R}$ que es el límite de $s=(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ escribimos

$$s_* = \lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k$$

En este caso, escribimos

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k < \infty$$

Ejemplos:

1) Sea $q \in (-1,1)$, arbitrario pero fijo. Consideremos la progresión geométrica $(q^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Recordemos que

$$\lim_{k\to+\infty} q^k = 0$$

Llamamos serie geométrica a la serie generada por la progresión geométrica $(q^k)_{k\in\mathbb{N}}$, i.e., $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Sea $n \in \mathbb{N}_0$, cualquiera. Veamos que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n$$

$$qS_n = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q^{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$$

$$S_n(1-q) = 1 - q^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Además

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

Tenemos que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^0}$$

$$= 2 - 1 = 1$$

Ejemplo.

Consideremos la sucesión $x = \left(\frac{1}{k(k+1)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. La n-ésima suma parcial generada por x es

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \qquad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \qquad a(k+1) + bk$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \qquad ak + bk + a$$

$$ak + bk = 0 \qquad a = 1$$

$$+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \qquad k + bk = 0 \qquad k(1+b) = 0$$

$$+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \qquad 1 + b = 0 \qquad b = -1$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Así,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Serie armónica.

La serie armónica es la serie generada por $x = \left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ $\left(\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0\right)$. Vamos a probar que la serie armónica no es convergente.

Supongamos que existe $S_* \in \mathbb{R}$ tal que

$$S_* = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

Así, existen

$$t_* = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} \qquad M_* = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1}$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Así, cuando $n \to +\infty$

$$S_* = t_* + M_*$$

$\left(\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = S_*\right.$ pues S_{2n} es una subsucesión de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a S_*).

Además, notemos que

$$t_* = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{S_*}{2}$$

Por lo tanto,

$$t_* = u_* = \frac{S_*}{2}$$

Se tiene que

$$S_n > 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad S_* = \lim_{n\to+\infty} S_n \geq \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 > 0$$

$$\Rightarrow \quad t_* = u_* = \frac{S_*}{2} > 0$$

Observemos que

$$0 = u_* - t_*$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{(3)(4)}+\frac{1}{(5)(6)}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n)}\right)$$
$$> 0$$

En resumen

$$u_* - t_* = 0$$

y

$$u_* - t_* > 0$$

lo cual es una contradicción.

Criterios de convergencia

Teorema: Sean $x := (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no negativos. y $s = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la serie generada por x.

Se tiene que s es convergente si y solo si s es acotada

En este caso,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = \sup_{m\in\mathbb{N}} S_n = \sup\{S_n : n\in\mathbb{N}\}$$

Demostración

En caso de que $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, sabemos que S es acotada.

(Propiedad de las sucesiones acotadas)

Ahora, supongamos que $s = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

Puesto que, cada x_k es no negativo tenemos que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k + 0$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} x_k = S_{n+1} \qquad \forall n\in\mathbb{N},$$

lo que muestra que s es creciente y como es acotada, entonces s es convergente.

Además

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n \qquad \square$$

Nota.

Recordemos que $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es de Cauchy cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$|x_k - x_j| < \varepsilon \qquad \forall k, j \geq k_0$$
$$|x_k - x_j| < \varepsilon \qquad \forall k > j \geq k_0$$

Recordemos que

* Toda sucesión de Cauchy es acotada;
* Criterio de Cauchy: Una sucesión de números reales es convergente si y solo si es de Cauchy.

Debido a este resultado, decimos que $\mathbb{R}$ es un espacio completo

Teorema - Criterio de Cauchy - Revisar

Sean $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y $s = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la serie generada por x.

La sucesión S es convergente si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right| < \varepsilon \qquad \forall n > m \geq k_0$$

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que s es convergente, por tanto es de Cauchy. Así, para todo $\varepsilon > 0$, existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k\right| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq k_0$$
$$\Leftrightarrow \left|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right| < \varepsilon \qquad \forall n > m \geq k_0$$

$\Leftarrow$) (Se sigue un proceso similar) $\square$

Nota

Sean $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ y $s=(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la serie generada por x. Sea $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ estrictamente creciente. Veamos que

$$s\circ\varphi=(s_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}=\left(\sum_{k=1}^{\varphi(n)}x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n^{*}}\frac{1}{k}$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}}_{\text{No son subsucesiones}}$$

Corolario

Sean $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ y $s=(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la serie generada por x. Si s es convergente, entonces

$$\lim_{k\to+\infty}x_k=0.$$

El recíproco no es cierto.

Demostración

Sea $\varepsilon>0$, arbitrario. Por el criterio de Cauchy para series, sabemos que existe $k_0\in\mathbb{N}$, tal que

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}x_k\right|<\varepsilon \qquad \forall\, n>m\geq k_0$$

En particular, cuando $n=m+1$, $m\geq k_0$ se tiene que

$$=\left|\sum_{k=m+1}^{m+1}x_k\right|<\varepsilon \qquad \forall m\geq k_0$$

$$=|x_{m+1}|<\varepsilon$$

Como ε es arbitrario, hemos probado, estrictamente que

$$\Rightarrow \lim_{m\to+\infty}x_{m+1}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to+\infty}x_m=0$$

lo que concluye la demostración $\square$

Nota.

Cuando x es una sucesión de números reales que no converge a 0, se tiene que la serie generada por x no es convergente.

Por ejemplo; consideremos $x=\left(\frac{k}{2k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ vemos que x es convergente a $1/2$, por lo tanto, la serie generada por x no es convergente.

Ejemplo

La serie $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ es convergente

Escribimos

$$S_n:=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}, \qquad \text{con } n\in\mathbb{N}.$$

Puesto que $n^2>n(n-1)$

Para $n=1$, ✓

$(n+1)^2>(n+1)((n+1)-1)$

$(n+1)^2>(n+1)(n)$

$(n+1)^2>n(n+1)$

$n^2+2n+1>n(n+1)$

$n^2+2n+1>n^2+n$

$n^2+n+1>n^2$

$(n+1)^2>n^2$

$\cancel{n^2}+2n+1>\cancel{n^2}$

$2n>-1$

$n>-\frac{1}{2}$

$n^2+2n+1>n^2+n$

$(n+1)^2>(n+1)((n+1)-1)$

$(n+1)^2>(n+1)((n+1)-1)$

$(n+1)^2>(n+1)(n+1-1)$

$(n+1)^2>(n+1)(n)$

$n^2+2n+1>n^2+n$

$n^2+1>n^2+n-2n$

$n^2+1>n^2-n$

$n^2+1>n(n+1)$

Puesto que $n^2>n(n-1)$ para todo $n\in\mathbb{N}$, para cualquier $m,n\in\mathbb{N}$ con $n>m$, tenemos que

$$|S_n-S_m|=\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

$$<\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k(k-1)}$$

$$=\sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

$$=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$$

$$=\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|. \qquad (1)$$

$\frac{a}{k}+\frac{b}{k-1}$

$a(k-1)+kb$

$ak-a+kb$

$ak+kb=0$

$a+b=0$

$a=-b$

$-a=1$

$a=-1$

$b=1$

Puesto que la sucesión $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente, es de Cauchy, por tanto para todo $\varepsilon>0$, existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|<\varepsilon \qquad \forall\, m,n\geq k_0$$

en particular,

$$=\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|<\varepsilon \qquad \forall n>m\geq k_0 \qquad (2)$$

$$=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$$

$\hookrightarrow \frac{1}{m}>\frac{1}{n}$

$\frac{1}{m}-\frac{1}{n}>0$

Materia: Análisis Real
Tema: Series
Hoja: 4 de

Combinando (1) y (2), se tiene que

$$|S_n - S_m| < \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \forall n > m \geq k_0$$

Esto muestra que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

es de Cauchy, y, por tanto es convergente.

Teorema - Criterio de comparación -

Sean $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales, para las cuales existe $k_0 \in \mathbb{N}$

$$0 \leq x_k \leq y_k \qquad \forall k \geq k_0 \qquad (*)$$

Se verifican los siguientes resultados

1) Si y genera una serie convergente, entonces x genera una serie convergente;

2) Si x genera una serie convergente a $+\infty$ entonces y genera una serie convergente a $+\infty$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$, cualquiera. Como y genera una serie convergente, por el criterio de Cauchy de series, sabemos que existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} y_k\right| < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq k_1$$

Tomando $k_* = \max\{k_0, k_1\}$, se tiene que

$$0 \leq x_k \leq y_k \qquad \forall k \geq k_* \geq k_1$$

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} y_k\right| < \varepsilon \qquad \forall n > m \geq k_* \geq k_1$$

Así,

$$0 \leq \sum_{k=m+1}^{n} x_k \leq \sum_{k=m+1}^{n} y_k = \left|\sum_{k=m+1}^{n} y_k\right| < \varepsilon$$

$\forall n > m > k_*$,

así

$$\sum_{k=m+1}^{n} x_k = \left|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right| < \varepsilon \qquad \forall n > m \geq k_*$$

y como ε es arbitrario, concluimos que la serie generada por x es convergente

Definición

Decimos que $\lim_{k\to+\infty} x_k = +\infty$ cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_k \geq \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0$$

2) Sabemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = +\infty.$$

Sea $\varepsilon > 0$, cualquiera. Sabemos que existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \geq \varepsilon \qquad \forall n \geq k_1.$$

→ $z = (z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $w = (w_k)_{k\in\mathbb{N}}$

(C) $z_k \leq w_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Si

$$\lim_{k\to+\infty} w_k = -\infty$$

entonces

$$\lim_{k\to+\infty} z_k = -\infty$$

Si $\lim_{k\to+\infty} z_k = +\infty$

entonces

$$\lim_{k\to+\infty} w_k = +\infty$$

Si $\lim_{k\to+\infty} z_k = +\infty$ entonces,

$$\lim_{k\to+\infty} (z_k + c) = +\infty \qquad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Notemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=k_0}^{n} x_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{k_0-1} x_k = +\infty$$

Por (*), tenemos

$$0 \leq \sum_{k=k_0}^{n} x_k \leq \sum_{k=k_0}^{n} y_k \qquad \forall n \geq k_0. \quad (1)$$

Puesto que (1) se cumple, de (2) concluimos que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=k_0}^{n} y_k = +\infty.$$

Así

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=k_0}^{n} y_k + \sum_{k=1}^{k_0-1} y_k\right) = +\infty$$

i.e.) → latín. (es decir)

Es decir, la serie generada por y diverge a $+\infty$. □

Ejemplo.
La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ es convergente.

Probemos que

$$0 \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k^2} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1,2,3\} \qquad P(k)$$
$$\hookrightarrow k_0 = 4.$$

Usemos inducción matemática sobre $k \in \mathbb{N}$.

→ Base de la inducción: Cuando $k=4$, vemos que

$$\frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$
$$\frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

así

$$\frac{1}{24} \leq \frac{1}{16}$$

→ Paso inductivo: Sea $k \in \mathbb{N} \setminus \{1,2,3\}$, arbitrario pero fijo. Supongamos que

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k^2}. \qquad (1)$$

P.D.

$$\frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{(k+1)^2}$$

Para $k \geq 4$, se tiene que

$$k! \geq k^2 \geq k+1$$
$$k!(k+1) \geq (k+1)^2$$
$$(k+1)! \geq (k+1)^2$$
$$\frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{(k+1)^2}$$

Por tanto

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k^2}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{(k+1)^2}\right) \qquad \forall k \geq 4.$$

De la base de la inducción y el paso inductivo (*) es cierto.

Puesto que

$$0 \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k^2} \qquad \forall k \geq 4,$$

y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ es convergente, del criterio de comparación se sigue que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < +\infty$ $\square$

Ejemplo
Para cualquier $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sabemos que

$$k^2 \leq k^p \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{k^2} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Así, del criterio de comparación se sigue que la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} < +\infty \qquad \forall p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

Teorema - criterio de Leibniz para series alternantes -
Sea $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión de reales no negativos, que es decreciente y que converge a 0. Se tiene que la serie alternante

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k$$

es convergente

Demostración
Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos las sumas parciales

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x_k$$

vamos a probar que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es de Cauchy.
Notemos que

$$S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x_k = S_{2n-1} + x_{2n} - x_{2n+1}$$

$\forall n \in \mathbb{N}_0$ y

$$S_{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k x_k = S_{2n} - x_{2n+1} + x_{2n+2}$$

$\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Así, como x es decreciente vemos que

$$x_{2k+1} \leq x_{2k} \quad \text{y}$$
$$x_{2k+2} \leq x_{2k+1},$$

por tanto,

$$S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \qquad (5)$$
$$S_{2n+2} \leq S_{2n} \qquad (6)$$

$\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Además, como todos los términos de x son no negativos, se tiene que

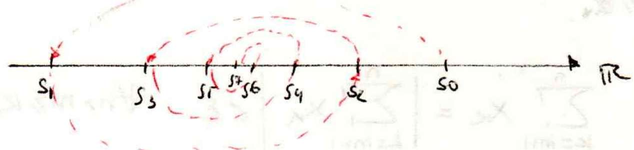
$$S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} x_{2n+1} = -x_{2n+1} \leq 0$$

y en consecuencia,

$$S_{2n+1} \leq S_{2n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 \qquad (7)$$

Para $n=0$

$$S_1 \leq S_0 \qquad (6)$$
$$S_2 \leq S_0 \qquad (7)$$



Para $n=1$

$$S_3 \leq S_2 \qquad (7)$$
$$S_4 \leq S_2 \qquad (6)$$
$$S_1 \leq S_3 \qquad (5)$$

Materia: Análisis Real

Tema: Series Infinitas

Hoja 5 de

Usando (5), (6), y (7), para cada $n, m \in \mathbb{N}_0$, se tiene que

$$|S_n - S_{n+m}| \leq |S_n - S_{n+1}|$$
$$= |-(-1)^{n+1} x_{n+1}|$$
$$= x_{n+1} \qquad (8)$$

Puesto que x converge a 0 y $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de x, $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a 0.

Sea $\varepsilon > 0$, cualquiera. Sabemos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_{n+1} = |x_{n+1} - 0| < \varepsilon \qquad \forall n \geq k_0 \qquad (9)$$

Así, combinando (8) y (9)

$$|S_n - S_{n+m}| < \varepsilon \qquad \forall n \geq k_0, \ \forall m \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow |S_n - S_j| < \varepsilon \qquad j \geq n \geq k_0,$$

lo que muestra, pues ε es arbitrario, que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es de Cauchy y por tanto, es convergente.

Ejemplo

1) $\sum_{k=0}^{+\infty}{}' \frac{(-1)^k}{k+1}$ $\qquad x_k = \frac{1}{k+1}, \ k \in \mathbb{N}_0$

- $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$

$x_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

$\lim_{k\to+\infty} x_k = 0$, x es decreciente.

2) $\sum_{k=1}^{+\infty}{}' \frac{(-1)^k}{k}$ $\qquad x_k = \frac{1}{k}, \ k \in \mathbb{N}$

$x_0 = 0$

$x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$

(1) y (2) son series convergentes.

Convergencia absoluta

Consideremos la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}{}' \frac{(-1)^{k+1}}{k},$$

la cual es convergente gracias al criterio de Leibniz. Vamos a tratar a esta serie (suma infinita) como una suma finita.

Escribimos

$$S_* := \sum_{k=1}^{+\infty}{}' \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \qquad (10)$$

por tanto

$$\frac{S_*}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \cdots \qquad (11)$$

Al sumar (10) y (11), obtenemos (Numberphile)

$$\frac{3}{2} S_* = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}$$
$$= S_*$$

lo que muestra que

$$\frac{3}{2} = 1,$$

lo cual es falso, así la serie $\sum_{k=1}^{+\infty}{}' \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ no tiene las propiedades de una suma finita de números naturales.

Definición - Serie absolutamente convergente -

Sea $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Decimos que la serie generada por x converge absolutamente cuando la serie generada por $(|x_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente, es decir,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}{}' |x_k| < +\infty$$

En caso de que $x_k \geq 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n}{}' x_k = \sum_{k=1}^{n}{}' |x_k| \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

así convergencia absoluta es equivalente a convergencia.

* Sabemos que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}{}' \frac{(-1)^k}{k} < +\infty,$$

sin embargo

$$\sum_{k=1}^{+\infty}{}' \left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = \sum_{k=1}^{+\infty}{}' \frac{1}{k}$$

la cual no es convergente, así

$$\sum_{k=1}^{+\infty}{}' \frac{(-1)^k}{k}$$

no converge absolutamente.

Proposición

Toda serie absolutamente convergente es convergente. Sin embargo, el recíproco no es cierto.

Demostración

Sea $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}{}' |x_k| < +\infty, \qquad (1)$$

cualquiera.

P.D.
$$\left(\sum_{k=1}^{n}{}' x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

es de Cauchy.

Sea $\varepsilon>0$, por (1) sabemos que $\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=m+1}^{n}|x_k| = \left|\sum_{k=m+1}^{n}|x_k|\right|<\varepsilon \qquad \forall n>m\geq k_0 \qquad (2)$$

De la desigualdad triangular y (2), tenemos que

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n}|x_k| < \quad \forall n>m\geq k_0$$

y como ε es arbitrario, la anterior desigualdad muestra que la sucesión

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

es de Cauchy, así

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k < +\infty \qquad \square$$

Definición

Sean $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ series de números reales. Decimos que $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ es un reordenamiento de $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ cuando existe $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ biyectiva tal que

$$x_k = y_{\varphi(k)} \qquad \text{para cada } k\in\mathbb{N}$$

Teorema: (Reordenamiento de series) (Requiere convergencia absoluta)

Si una serie convergente absolutamente entonces cualquiera de sus reordenamientos converge absolutamente al mismo límite.

Demostración

Sea $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ tal que la serie generada por x es absolutamente convergente, i.e., existe $S_*\in\mathbb{R}$ tal que

$$S_* = \lim_{n\to+\infty} S_n,$$

donde

$$S_n := \sum_{k=1}^{n}|x_k| \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Sea $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ un reordenamiento de $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$. Por tanto, existe un $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ biyectiva, tal que

$$x_k = y_{\varphi(k)} \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$
$$\iff x_{\varphi^{-1}(k)} = y_k \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

Definimos la sucesión $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$, con

$$t_m = \sum_{k=1}^{m}|y_k|, \qquad \forall m\in\mathbb{N}.$$

P.D.

$$\lim_{m\to+\infty} t_m = S_*$$

$$|t_m - S_*| = |t_m - S_m + S_m - S_*|$$
$$\leq |t_m - S_m| + |S_m - S_*|$$
$$\leq |t_m - S_m| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $\varepsilon>0$, cualquiera. Sabemos que existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$|S_n - S_*| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n\geq k_0 \qquad (1)$$

$$\sum_{k=m+1}^{n}|x_k| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n>m\geq k \qquad (2)$$

Para cada $n\in\mathbb{N}$, consideremos $H_n\in\mathbb{N}$ que es el más pequeño de los naturales tal que

$$|x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots, |x_n|$$

aparecen en

$$\sum_{k=1}^{H_n}|y_k|,$$

con lo cual $H_n\geq n$. Así, para cualquier $m\geq H_n$, $|x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots, |x_n|$ aparecen en la suma

$$t_m = \sum_{k=1}^{m}|y_k|.$$

Definamos también

$$A_{mn} = \{k\in\mathbb{N} : n < \varphi^{-1}(k)\leq m\} \subseteq \{n+1, n+2, \dots, m\}$$

para cada $n\in\mathbb{N}$ y cada $m\geq H_n\geq n$.

Por tanto,

$$t_m - S_n = \sum_{k=1}^{n}|y_k| - \sum_{k=1}^{m}|x_k|$$
$$= \sum_{k=1}^{n}|x_{\varphi^{-1}(k)}| - \sum_{k=1}^{n}|x_k|$$
$$= \sum_{k\in A_{mn}}|x_{\varphi^{-1}(k)}| \leq \sum_{k=n+1}^{m}|x_k| \qquad (3)$$

para cualquier $n\in\mathbb{N}$, $m\geq H_n\geq n$.

Usando (2) y (3), observemos que

$$|t_m - S_n| \leq \sum_{k=n+1}^{m}|x_k| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall m>n\geq k_0$$

Así, de la desigualdad triangular, por (1)

$$|t_m - S_*| \leq |t_m - S_n + S_n - S_*|$$
$$\leq |t_m - S_n| + |S_n - S_*|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall m\geq k_0.$$

Como ε es arbitrario, se sigue que

$$\lim_{m\to+\infty} t_m = S_*$$

Materia: Análisis Real

Tema:

Hoja 6 de

Teorema: (Criterio de ~~separación~~ convergencia de límites, I)

Sean $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $y=(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$x_k, y_k > 0 \qquad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Supongamos que existe $r_* \in \mathbb{R}$ tal que

$$r_* = \lim \frac{x_k}{y_k}.$$

Se tiene que:

- Si $r_* \neq 0$ entonces

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k < +\infty \quad \text{si y solo si} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} y_k < +\infty$$

Demostración

Notemos que

$$\frac{x_k}{y_k} > 0 \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

$\Rightarrow$

$$r_* = \lim_{k\to+\infty} \frac{x_k}{y_k} \geq 0$$

Caso 1: $r_* > 0$ $\qquad \varepsilon = \frac{r^*}{2}$

$$-\varepsilon < \frac{x_k}{y_k} - r^* < \varepsilon$$

tomando $\varepsilon = \frac{r^*}{2}$

$$-\frac{r^*}{2} < \frac{x_k}{y_k} - r^* < \frac{r^*}{2}$$

$$\frac{r^*}{2} < \frac{x_k}{y_k} < \frac{3}{2} r^*$$

$$0 \leq y_k\left(\frac{1}{2}\right)r^* < x_k < y_k\left(\frac{3}{2}r^*\right)$$

Para $\varepsilon = \frac{r^*}{2} > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$r^* - \frac{r^*}{2} < \frac{x_k}{y_k} < \frac{r^*}{2} + r^*$$

$$\Leftrightarrow y_k\left(\frac{r^*}{2}\right) < x_k < \left(\frac{3r^*}{2}\right) r^* \qquad \forall k \geq k_0$$

Del criterio de comparación, se sigue que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k < +\infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} y_k < +\infty$$

2) Si $r_* = 0$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k < +\infty$ entonces $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k < +\infty$

Demostración

Notemos que

$$\frac{x_k}{y_k} > 0 \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad r_* = \lim_{k\to+\infty} \frac{x_k}{y_k} \geq 0$$

Caso 2 $\quad r_* = 0$. Para $\varepsilon = 1 > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{x_k}{y_k} < 1 \qquad \forall k \geq k_0$$

$$\Rightarrow \quad 0 < x_k < y_k \qquad \forall k \geq k_0$$

Así, del criterio de comparación y $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k < +\infty$ se sigue que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k < +\infty$$

$\square$

Teorema — Criterio de convergencia de límites, II

Sean $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $y=(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

⋮

Materia: Análisis Real
Tema: Series
Hoja 1 de

Teorema: - Criterio de comparación de límites, II

Sean $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $y=(y_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$, y $r^*\in\mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{|x_k|}{|y_k|}=r^*.$$

Se tienen los siguientes enunciados.

* Si $r\neq 0$ entonces $\sum_{k=1}^{+\infty}{}' x_k$ converge absolutamente si y solo si $\sum_{k=1}^{+\infty}{}' y_k$ converge absolutamente.

$\left(\sum_{k=1}^{+\infty}{}'|x_k|<+\infty \text{ si y solo si } \sum_{k=1}^{+\infty}{}'|y_k|\right)$.

* Si $r=0$ y la serie generada por $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es absolutamente convergente entonces la serie generada por x converge absolutamente.

Teorema - Criterio de la raiz-

(i) Si $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$, $q\in[0,1)$ y $k_0\in\mathbb{N}$ son tales que

$$|x_k|^{1/k}\leq q \qquad \forall k\geq k_0$$

entonces x genera una serie absolutamente convergente.

(ii) Si $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ y $k_0\in\mathbb{N}$ son tales que

$$x_k^{1/k}>1 \qquad \forall k\geq k_0$$

entonces

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}{}'|x_k|=+\infty$$

Demostración

i) Puesto que

$$|x_k|^{1/k}\leq q \qquad \forall k\geq k_0$$

$$\Rightarrow 0\leq |x_k|\leq q^k \qquad \forall k\geq k_0,$$

y $\sum_{k=0}^{+\infty}{}' q^k$ es convergente, se sigue del criterio de comparación que $\sum_{k=1}^{+\infty}{}'|x_k|<+\infty$

ii) Puesto que

$$x_k^{1/k}>1 \qquad \forall k\geq k_0$$

$$\Rightarrow x_k>1\geq 0 \qquad \forall k\geq k_0$$

en donde

$$\sum_{k=1}^{+\infty}{}' 1=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}{}' 1=\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$$

por tanto, del criterio de comparación

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}{}'|x_k|=+\infty$$

□

Corolario - Criterio de la raiz-

Sean $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ y $q_*\in\mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{k\to+\infty}|x_k|^{1/k}=q_*$$

i) Si $q_*\in[0,1)$ entonces x genera una serie absolutamente convergente;

ii) Si $q_*>1$, entonces $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}{}'|x_k|=+\infty$.

Cuando $q_*=1$ el criterio no es concluyente

Demostración

Caso (i)

Tomemos $q\in(q_*,1)$, arbitrario pero fijo. De este modo $q-q_*>0$, así existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\left|\,|x_k|^{1/k}-q_*\right|<q-q_* \qquad \forall k\geq k_0$$

$$|x_k|^{1/k}-\cancel{q_*}\leq\left|\,|x_k|^{1/k}-q_*\right|<q-\cancel{q_*} \qquad \forall k\geq k_0$$

$$|x_k|^{1/k}<q \qquad \forall k\geq k_0,$$

donde $q\in[0,1)$. Así, por el criterio de la raiz, x genera una serie absolutamente convergente.

Caso (ii) hacer como ejercicio. □

Ejemplo

Consideremos la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}{}'\left(\frac{k+1}{2k-1}\right)^k$$

Calculemos

$$\left[\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{k+1}{2k-1}\right)^k\right]^{1/k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k+1}{2k+1}=\frac{1}{2}<1$$

$$x_k=\left(\frac{k+1}{2k-1}\right)^k=|x_k|, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Del criterio de la raiz, la serie $\sum_{k=0}^{+\infty}{}' x_k$ es absolutamente convergente.

Ejemplo

Consideremos

$$\sum_{k=1}^{+\infty}{}'\left(\frac{3k-1}{2k+1}\right)^{k+2}$$

En este caso

$$x_k=\left(\frac{3k-1}{2k+1}\right)^{k+2} \qquad k\in\mathbb{N}.$$

$y_k = x_{k-2} = \left(\frac{3k-7}{2k-3}\right)^k \quad \forall k \in \mathbb{N}\setminus\{1,2\}$

Así,

$$\lim_{k\to+\infty} y_k^{1/k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{3k-7}{2k-3} = \frac{3}{2} > 1$$

y por el criterio de la raíz, la serie generada por $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}} = (y_k)_{k=3}^{+\infty}$

$$(y_k)_{k=3}^{+\infty} = (x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_n)$$

diverge a $+\infty$.

Teorema (Criterio del radio de convergencia de D'Alembert)

Sea $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $x_k \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Se verifican los siguientes enunciados.

i) Si existen $q \in [0,1)$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| \leq q \qquad \forall k \geq k_0$$

entonces la serie generada por x es absolutamente convergente;

ii) Si existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} \geq 1 \qquad \forall k \geq k_0$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k| = +\infty$$

Demostración

i) Tenemos que

$$|x_{k+1}| \leq q|x_k| \qquad \forall k \geq k_0$$

Así,

$$|x_{k_0+m}| \leq q^m |x_{k_0}| \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{\Rightarrow 0 \leq |x_k| \leq q^m |x_{k_0}| \qquad \forall k \geq k_0+1 \quad \forall m \in \mathbb{N}}$$

Como $\sum_{m=1} q^m |x_{k_0}| < +\infty$, por el criterio de comparación $\sum_{m=1}^{+\infty} |x_{k_0+m}| < +\infty$. Por tanto

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k| = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{k_0} |x_k| + \sum_{k=k_0+1}^{n} |x_k| \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{k_0} |x_k| + \lim_{n\to+\infty} \sum_{m=1}^{n-k_0} |x_{k_0+m}|$$

$$= \sum_{k=1}^{x_0} |x_k| + \sum_{m=1}^{+\infty} |x_{k_0+m}| < +\infty$$

ii) Basta con checar que $\lim_{k\to+\infty} |x_k| \neq 0$. Así la serie generada por x no es convergente absolutamente.

$$|x_{k+1}| \geq |x_k| \qquad \forall k \geq k_0$$

$$|x_{k+1}| \geq |x_k| \geq 0$$

demostración

$$|x_{k+1}| \geq |x_k| \qquad \forall k \geq k_0$$

$$|x_k| \geq |x_{k_0}| \geq 0 \qquad \forall k \geq k_0$$

Como la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_{k_0}| = +\infty$, por el criterio de comparación se sigue que $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|$ diverge a $+\infty$. □

Corolario (Criterio de radio de convergencia de D'Alembert)

Sea $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$ y $r_* \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| = r_* \geq 0.$$

i) Si $r_* \in (0,1)$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} |x_k| < +\infty;$$

ii) Si $r_* > 1$, entonces $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k| = +\infty$. En el caso de $r_* = 1$, el criterio no es concluyente.

Demostración

i) Tomemos $r \in (r^*, 1)$, arbitrario pero fijo. De este modo $r - r^* > 0$ y existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| - r_* \right| < \varepsilon = r - r^* \qquad \forall k \geq k_0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| - r_* \leq \left| \left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| - r_* \right| < r - r^*$$

$$\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| < r \qquad \forall k \geq k_0.$$

con $r \in [0,1)$. Así, $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ genera una serie absolutamente convergente □

Deber

→ desigualdad → teórica

→ límites → ejercicio

Materia: Análisis Real
Tema: Series
Hoja 7 de

Ejemplo (1)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k k!}{k^k} < +\infty$$ En este caso por el criterio de radio de convergencia

$$x_k = \frac{2^k k!}{k^k}, \quad k\in\mathbb{N}$$

$$x_{k+1} = \frac{2^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}$$

Calculemos

$$\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| = \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{2^{k+1}(k+1)!\,k^k}{2^k k!\,(k+1)^{k+1}}$$

$$= \frac{2k^k}{(k+1)^k} = 2\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \Rightarrow 2\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{2}{e}$$

$e > 2$

$$\frac{1}{e} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{e} < 1$$

Ejemplo (2)

$$x_k = \frac{(k!)^2}{(2k)!} \quad k\in\mathbb{N}$$

$$x_k = \frac{(k!)^2}{(2k)!}, \quad x_{k+1} = \frac{((k+1)!)^2}{(2(k+1))!} = \frac{((k+1)!)^2}{(2k+2)!}$$

$$\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| = \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{\frac{((k+1)!)^2}{(2k+2)!}}{\frac{(k!)^2}{(2k)!}}$$

$$= \frac{((k+1)!)^2(2k)!}{(2k+2)!\,(k!)^2} = \frac{(\cancel{k!}^2(k+1)^2)(\cancel{2k!})}{(2k+2)(2k+1)\cancel{(2k)!}\,\cancel{(k!)^2}}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{(k+1)^{\cancel{2}}}{2\cancel{(k+1)}(2k+1)} = \frac{k+1}{2(2k+1)} = \frac{k+1}{4k+2}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, la serie generada por x_k es convergente gracias al criterio del radio de convergencia de D'Alembert.

Ejemplo (3)

Encuentre los valores de $a>0$ para los cuales la sucesión $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ genera una serie absolutamente convergente, donde, cada

$$x_k = \frac{k!}{(a)(a+1)(a+2)\cdots(a+k)}$$

$$x_{k+1} = \frac{(k+1)!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+k)(a+k+1)}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right|$$

$$\frac{\frac{(k+1)!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+k+1)}}{\frac{k!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+k)}}$$

$$\frac{(k+1)!\,\cancel{(a)(a+1)(a+2)\cdots(a+k)}}{k!\,(a)(a+1)(a+2)\cdots(a+k)(a+k+1)}$$

$$\frac{k+1}{a+k+1} = \frac{k+1}{k+(a+1)}$$

Teorema - Criterio de Raabe - Duhamel -

Sea $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Se tiene que

i) Si existe $a>1$ y $k_0\in\mathbb{N}$ tal que
$$\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| \le 1 - \frac{a}{k} \quad \forall k\ge k_0$$
entonces, la serie generada por x es absolutamente convergente;

ii) Si existen $a\le 1$ y $k_0\in\mathbb{N}$ tales que
$$\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| \ge 1 - \frac{a}{k} \quad \forall k\ge k_0$$
$$|x_k| - \frac{a}{k}|x_k| + |x_k| - |x_k|$$
entonces $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}|x_k| = +\infty$$

Demostración

i) Tenemos que
$$\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| \le 1 - \frac{a}{k} \quad \forall k\ge k_0$$

$$\Rightarrow |x_{k+1}| \le |x_k| - \frac{a}{k}|x_k| \quad \forall k\ge k_0$$

$$k|x_{k+1}| \le k|x_k| - a|x_k| \quad \forall k\ge k_0$$ suma y resta $|x_k|$

$$-(a-1)|x_k|$$

$$\Rightarrow 0 < (a-1)|x_k| \le (k-1)|x_k| - k|x_{k+1}| \quad \forall k\ge k_0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow k|x_{k+1}| \le (k-1)|x_k| \quad \forall k\ge k_0 \quad (*)$$

Así, la sucesión
$$(k|x_{k+1}|)_{k=k_0}^{+\infty}$$
es decreciente. Por tanto,
$$k|x_{k+1}| \le k_0|x_{k_0+1}| < (k_0-1)|x_{k_0}| \quad \forall k\ge k_0 \quad (2)$$

Además, de (1) se sigue que
$$0 < \sum_{k=k_0}^{n}|x_k| \le \sum_{k=k_0}[(k-1)|x_k| - k|x_{k+1}|] \quad \forall n\ge k_0$$
$$= (k_0-1)|x_{k_0}| - n|x_{n+1}|$$
$$< (k_0-1)|x_{k_0}| + n|x_{n+1}|$$
$$< 2(k_0-1)|x_{k_0}| \quad \text{por (2)}\ \forall n\ge k_0$$

Así, Por tanto
$$\sum_{k=1}^{n}|x_k|$$
$$= \sum_{k=1}^{k_0-1}|x_k| + \sum_{k=k_0}^{n}|x_k|$$

$$< \sum_{k=1}^{k_0} |x_k| + \frac{2(k_0-1)|x_{k_0}|}{a-1}$$

$$< M \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Lo que muestra que la sucesión de términos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$$ es acotada y monótona,

por lo tanto es convergente. Así, la serie generada por x es absolutamente convergente

ii) Tenemos que $\quad a<1 \quad -a>-1$

$$k|x_{k+1}| \geq (k-a)|x_k|$$

$$\geq (k-1)|x_k| \qquad \forall k \geq k_0$$

Así, la sucesión

$$(k|x_{k+1}|)_{k=k_0}^{+\infty}$$ es creciente.

Por tanto

$$k|x_{k+1}| \geq k_0-1 \, |x_{k_0}| \geq 0 \qquad \forall k \geq k_0,$$

además

$$k|x_{k+1}| \geq (k_0+1)|x_{k_0+1}| > 0 \qquad \forall k \geq k_0+1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{c}{k} \leq |x_{k+1}| \qquad \forall k \geq k_0+1$$

$$c := (k_0+1)|x_{k_0+1}| > 0$$

Puesto que la serie generada por $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c}{n}$ diverge a $+\infty$, por el criterio de comparación, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|$$

diverge a $+\infty$ $\square$

Corolario - Criterio de Raabe-Duhamel -

Sean $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$ y $r_* \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{k\to+\infty} k\left(1-\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right|\right) = r^*$$

i) Cuando $r_*>1$ la serie es absolutamente convergente.

ii) Cuando $r_* \leq 1$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$$

diverge a $+\infty$.

Demostración

Consideremos $r\in(1, r_*)$, así $r_*-r>0$. Por tanto, existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\left|k\left(1-\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right|\right)-r_*\right| < r_*-r \qquad \forall k\geq k_0$$

$$r_*-r\left(1-\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right|\right) \leq \left|k\left(1-\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right|-r_*\right)\right| < r_*-r$$

De este modo

$$-\left(1-\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right|\right) < -\frac{r}{k}$$

$$\left(-1+\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right|\right) > -\frac{r}{k}$$

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} < 1-\frac{r}{k} \qquad \forall k\geq k_0$$

lo cual satisface el criterio de Raabe-Duhamel, así, x genera una serie absolutamente convergente

ii) Consideremos $r\in(r_*, 1]$, así $r-r_*>0$. Por tanto existe

$$\left|k\left(1-\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right)-r_*\right| < r-r_* \qquad \forall k\geq k_0$$

$$k\left(1-\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right)-r_* < r-r_*$$

$$k\left(1-\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) < r$$

$$1-\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < \frac{r}{k}$$

$$-1+\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > -\frac{r}{k} \Rightarrow \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1-\frac{r}{k} \qquad \forall k\geq k_0$$

lo cual, satisface el criterio de Raabe-Duhamel, así, x genera una serie absolutamente convergente.

$$r_* \leq 1$$

$$r\in(r_*, 1]$$

Más criterios de convergencia

Lema (Abel)

Sean $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $y=(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la serie generada por y, con $s_0:=0$. Para cada $n,m\in\mathbb{N}$, $n>m$, se tiene la fórmula de sumatoria de Abel.

$$\sum_{k=m+1}^{n} x_k y_k = (x_n s_n - x_{m+1} s_m) + \sum_{k=m+1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) s_k$$

Demostración

Notemos que

$$y_k := s_k - s_{k-1}$$

Sean $n,m\in\mathbb{N}$, $n>m$, cualesquiera.

Se tiene que

$$\sum_{k=m+1}^{n} x_k(s_k-s_{k-1}) = x_n.(s_n-s_{n-1}) + \sum_{k=m+1}^{n-1} x_k(s_k-s_{k-1})$$

$$=(x_n s_n - x_{m+1} s_m) + (x_{m+1} s_m - x_n s_{n-1})$$

$$+\sum_{k=m+1}^{n-1}(x_k s_k - x_k s_{k-1})$$

Materia Análisis Real
Tema Criterios Adicionales
Hoja 8 **de**

$$= (x_n S_n - x_{m+1} S_m)$$
$$+ \cancel{x_{m+1} S_m} - x_n S_{n-1} + x_{m+1} S_{m+1} - \cancel{x_{m+1} S_m}$$
$$+ x_{m+2} S_{m+2} - x_{m+2} S_{m+1} + \dots + x_{n-2} S_{n-1} -$$
$$x_{n-2} S_{n-3} + x_{n-1} S_{n-1} - x_{n-1} S_{n-2}$$
$$= (x_n S_n - x_{m+1} S_n)$$
$$+ (x_{m+1} - x_{m+2}) S_{m+1}$$
$$+ (x_{m+2} - x_{m+3}) S_{m+2}$$
$$+ \dots + (x_{n-2} - x_{n-1}) S_{m-2}$$
$$+ (x_{n-1} - x_{n-2}) S_{n-1}$$
$$= (x_n S_n - x_{m+1} S_n) + \sum_{k=m+3}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) S_k \qquad \square$$

Teorema. - Criterio de Dirichlet -

Sean $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tales que

* x sea decreciente;
* la serie generada por y es acotada; (sumas parciales acotadas)
* $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = 0$

La serie generada por $(x_k y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Demostración

Vamos a demostrar que la serie generada por $(x_k y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Denotemos por $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la serie generada por (y). Por hipótesis, sabemos que existe $M>0$, tal que

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} y_k\right| \leq M \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Además, como x es decreciente, se sigue que

$$x_k - x_{k+1}$$

Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m<n$ para m, n cualesquiera

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \sum_{k=1}^{m} x_k y_k\right| \qquad (2)$$
$$= \left|\sum_{k=m+1}^{n} x_k y_k\right|$$

Por la fórmula de Abel

$$= \left|(x_n S_n - x_{m+1} S_m) + \sum_{k=m+1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) S_k\right|$$

luego, por la desigualdad triangular

$$\leq |x_n||S_n| + |x_{m+1}||S_n| + \sum_{k=m+1}^{n+1} |x_k - x_{k+1}|\,|S_k|$$
$$\leq M \left(|x_n| + |x_{m+1}| + \sum_{k=m+1}^{n-1} (x_k - x_{k+1})\right)$$
$$\leq M \left(|x_n| + |x_{m+1}| + |x_{m+1} - x_n|\right) \qquad (3)$$
$$\leq M \left(2|x_{m+1}| + |x_n| - x_n\right.$$
$$\leq 2M \left(|x_{m+1}| + |x_n|\right) \qquad (3^*)$$

$\forall n, m \in\mathbb{N}$ con $m<n$

Sea $\varepsilon>0$, cualquiera. Como x es convergente a 0, existe ~~m~~ $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$|x_k| < \frac{\varepsilon}{4M} \qquad \forall k\geq k_0$$

$$\Rightarrow |x_{m+1}| < \frac{\varepsilon}{4M} \qquad \forall m\geq k_0 \qquad (4)$$

$$\Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{4M} \qquad \forall n > m \geq k_0 \qquad (5)$$

Usando (3), (4), y (5)

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \sum_{k=1}^{m} x_k y_k\right| \leq 2M \left(|x_{m+1}| + |x_n|\right)$$
$$\leq 2M \left(\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M}\right) \qquad \forall n, m \geq k_0$$
$$= \varepsilon$$

Como ε es arbitrario, la sucesión $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, lo que implica que es convergente.

Teorema: - Criterio de Abel -

Sean $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tales que

* x es monótona y convergente.
* las sumas parciales generadas por y son acotadas. (serie convergente)

Se tiene que la serie generada por $(x_k y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Demostración (caso creciente)

Sea $x_* \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x_*$.
Para cada $k\in\mathbb{N}$ escribimos

$$u_k = x_k - x_*$$
$$v_k = x_* - x_k$$

Así, (u_k) es decreciente y converge a 0.
Por el criterio de Dirichlet la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k y_k = \sum_{k=1}^{+\infty} (x_k - x_*) y_k$$

es convergente.

Ahora,

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} (u_k y_k + x_* y_k) \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} x_k y_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k y_k + x_* \sum_{k=1}^{+\infty} y_k < +\infty$$

Ejemplo

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente que converge a 0. La serie generada por $(a_k\cos(kx))$ es convergente para cada $x\in\mathbb{R}\setminus\{4\pi j : j\in\mathbb{Z}\}$

Por las propiedades de a_k, podemos usar el criterio de Dirichlet.

Así, basta probar que las sumas parciales generadas por $(\cos(kx))_{k\in\mathbb{N}}$ son acotadas, para $x\in\mathbb{R}\setminus\{4\pi j: j\in\mathbb{Z}\}$

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx)\le M.$$

Se sabe que

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(\sum_{k=1}^n\cos(kx)\right) = \operatorname{sen}\left(\left(n+\frac12\right)x\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}$.

Así

$$\left|\sum_{k=1}^n \cos(kx)\right| = \frac{\left|\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac12\right)x\right) - \operatorname{sen}\left(\frac x2\right)\right|}{\left|\operatorname{sen}\left(\frac x2\right)\right|}$$

$$\le \frac{1}{\left|\operatorname{sen}\frac x2\right|}\left(\left|\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac12\right)x\right)\right| - \left|\operatorname{sen}\left(\frac x2\right)\right|\right)$$

$$\le \frac{2}{\left|\operatorname{sen}\left(\frac x2\right)\right|}\qquad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Así, para cada $x\in\mathbb{R}\setminus\{4\pi j: j\in\mathbb{Z}\}$, se tiene que

$$\left(\sum_{k=1}^n \cos(kx)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

es acotada.

Por tanto

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\cos(xk) < +\infty \qquad \square$$

Ejemplo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} q^k < +\infty, \quad q\in(-1,1)$$

$$x = \left(\frac{1}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q^k}{k!} < +\infty$$

~~Teorema~~

Teorema - Criterio integral -

Sea $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ una función tal que f es positiva, i.e. $f(t)>0\ \forall t\in[1,+\infty)$; • f decreciente. Para cada $k\in\mathbb{N}$, escribimos

$$x_k = f(k)$$

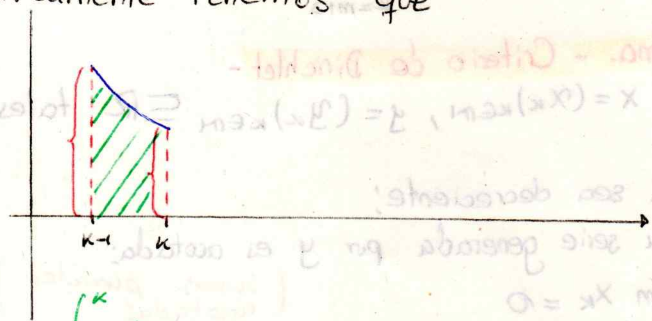
La serie generada por $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente si y sólo si la integral impropia

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$$

existe.

Demostración

Puesto que f es decreciente y positiva, así gráficamente tenemos que



$$f(k)\le\int_{k-1}^k f(t)\,dt \le f(k-1)$$

para cada $k\ge2$. Así, para cada $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ se tiene que

$$\sum_{k=2}^n f(k) \le \sum_{k=2}^n\int_{k-1}^k f(t)\,dt \le \sum_{k=2}^n f(k+1)$$

$$\sum_{k=1}^n x_k - x_1 \le \int_1^n f(t)\,dt \le \sum_{k=1}^{n-1} x_k.$$

Por tanto, con

$$S_n := \sum_{k=1}^n x_k,\quad n\in\mathbb{N}$$

$$S_n - x_1 \le \int_1^n f(t)\,dt \le S_{n-1},$$

De esta última desigualdad, vemos que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si y sólo si

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$$

$\forall n\in\mathbb{N}$

existe.

Materia: Análisis Real
Tema: Espacios de ℓ^p
Hoja 9 de

Ejemplo:

Recordemos que la sucesión $\left(\frac{1}{k^p}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ genera una serie convergente para cada $p\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$.
Tomemos ahora $p>1$ (real)

Para cada $k\in\mathbb{N}$, escribimos
$$x_k=\frac{1}{k^p}$$
así. $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Usemos el criterio integral.
Consideremos
$$f:[1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$t\longmapsto f(t)=\frac{1}{t^p}=t^{-p}$$
es positiva ($t^p\geq 1$) $\forall t\in[1,+\infty[$ y es decreciente
Calculemos
$$\int_1^{+\infty}f(t)\,dt=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{t^p}\,dt$$
$$=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b t^{-p}\,dt=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{t^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^b$$
$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1^{-p+1}}{-p+1}\right)=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right)$$
$$=-\frac{1}{p-1}=\frac{1}{1-p}\in\mathbb{R}$$
Como $\int_1^{+\infty}f(t)\,dt$ existe, la serie generada por $\left(\frac{1}{k^p}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente, para cada $p>1$.

Además cuando $p=1$
$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,dt=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{t}\,dt$$
$$=\lim_{b\to+\infty}(\ln(b)-\cancel{\ln(1)}^{\,0})$$
$$=+\infty$$
así, la serie generada por $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ no es convergente.

Espacios de Lebesgue de Sucesiones

Para $p\in[1,+\infty)$, definimos (Espacio de Lebesgue)
$$\ell^p:=\left\{x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}:\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^p<+\infty\right\},$$
al cual llamamos el espacio de Lebesgue ℓ^p de sucesiones.

Notemos que
$$\sum_{k=1}^{+\infty}|0|^p=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}|0|^p=0$$
esto para cualquier $p\in[1,+\infty)$.
Así,
$$(0)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell^p\qquad\forall p\in[1,+\infty[.$$
Sabemos que
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^p}<+\infty\qquad\forall p>1$$
y $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$ diverge.

Así,
$$\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell^p,\ \forall p>1.$$

- $\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ $\quad\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}<+\infty$

$$\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell^1\qquad\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell^2$$

- $\sum_{k=0}^{+\infty}q^k$ con $q\in(-1,1)$
- $\sum_{k=0}^{+\infty}q^k<+\infty$

$\Rightarrow\hat{q}=(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$
$$\sum_{k=0}^{+\infty}|q^k|=\sum_{k=1}^{+\infty}|q|^k<+\infty\quad\text{pues } |q|\in[0,1)$$

Espacios de Lebesgue como e.v. Sea $p\in[1,+\infty)$, cualquiera. Sobre ℓ^p definimos las operaciones

[suma]: $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $y=(y_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell^p$,
$$x+y=(x_k+y_k)_{k\in\mathbb{N}}$$
[producto escalar] $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell^p$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Materia: Análisis Real
Tema:
Hoja de

infinito numerable

$p\in[1,+\infty)$

$$\ell^p := \{x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq : \|x\|_p^p<+\infty\}$$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

Lema: - Desigualdad de Young -

Sean $a,b\in\mathbb{R}^+$ cualquier par y $p,q\in(1,+\infty)$ tales que

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

decimos que p y q son exponentes conjugados.
Se tiene que

$$ab\leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

Demostración

No es difícil ver que para $a=0$ o $b=0$, la desigualdad de Young se cumple. Supongamos que $a,b>0$. Del hecho de que q y p son exponentes conjugados, se tiene que

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \iff q-1=\frac{1}{p-1} \qquad (1)$$

Consideremos la función

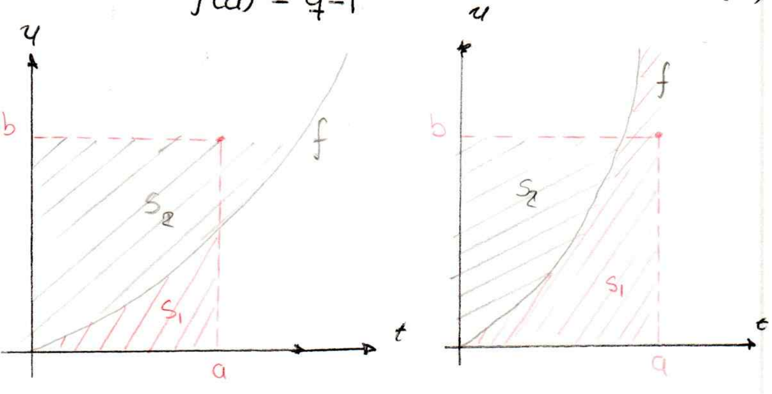
$$f:[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$t\longmapsto f(t)=t^{p-1}$$

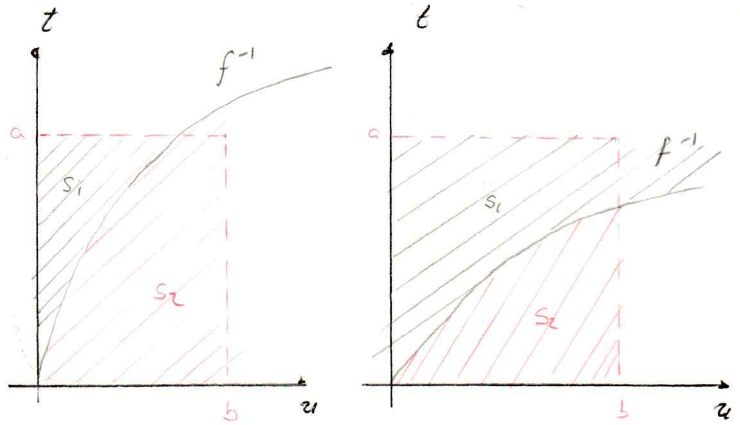
la cual es estrictamente creciente y $f(t)\geq 0$ para cada $t\in[0,+\infty)$, y posee inversa

$$t=f^{-1}(u)=u^{\frac{1}{p-1}}$$

por (1), se tiene que

$$f^{-1}(u)=q-1 \qquad (1)$$





Llamemos S_1 el área bajo la curva f "entre el intervalo" (sobre el intervalo) $[0,a]$
S_2 el área bajo la curva f^{-1} sobre el intervalo $[0,b]$

De las gráficas, vemos que

$$ab\leq S_1+S_2$$

donde

$$S_1=\int_0^a f(t)\,dt=\int_0^a t^{p-1}dt)=\frac{a^p}{p}$$

$$S_2=\int_0^b f^{-1}(u)\,du=\int_0^a u^{q-1}du=\frac{b^q}{q}$$

Así, se tiene que

$$ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \qquad \square$$

$$0\leq(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

$$\Rightarrow\ ab\leq\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$$

Lema (Desigualdad de Hölder)

Gödel, Escher y Bach Una eterna trenza dorada

Sean $p,q\in(1,+\infty)$ exponentes conjugados.
Si $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell^p$, $y=(y_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell^q$, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k y_k|\leq\|x\|_p\|y\|_q$$

Demostración

En el caso de que $\|x\|_p=0$ o $\|y\|_q=0$, no es difícil probar que o $x=(0)_{k\in\mathbb{N}}$ o bien $y=(0)_{k\in\mathbb{N}}$ y por tanto la desigualdad se cumple trivialmente.
Supongamos que $\|x\|_p\neq0$ y $\|y\|_q\neq0$. Para cada $k\in\mathbb{N}$ definimos

$$a_k=\frac{x_k}{\|x\|_p} \quad y \quad b_k=\frac{y_k}{\|y\|_q} \qquad (1)$$

Materia: Análisis Real
Tema: Espacios ℓ^p
Hoja 10 de

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p} = \frac{1}{\|x\|_p^p} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p ;$$

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q = \sum_{k=1}^{n} \frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q} = \frac{1}{\|y\|_q^q} \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q .$$

Puesto que $x \in \ell^p$ y $y \in \ell^q$, tomamos el límite cuando n tiende al infinito en las anteriores igualdades, de las que obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p = \frac{1}{\|x\|_p^p} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = 1 ; \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q = \frac{1}{\|y\|_q^q} \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q = 1 \qquad (3)$$

Ahora, usando la desigualdad de Young, se sigue que

$$|a_k b_k| \leq \frac{|a_k|^p}{p} + \frac{|b_k|^q}{q} \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia, para $n \in \mathbb{N}$ vemos que

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \qquad (4)$$

Así, cuando n tiende al infinito, combinando (1), (2), (3) y (4) y el hecho de que p y q son exponentes conjugados, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| &= \frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \\
&\leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q \\
&\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&= 1
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| = \|x\|_p \|y\|_q$$

Teorema - Desigualdad de Minkowsky -

Para $p \in [1,+\infty)$, se tiene que

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

para todo $x, y \in \ell^p$

Demostración

Caso 1: $p=1$

En este caso

$$\ell^1 = \left\{ x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k| = \|x_k\|_1 < +\infty \right\}$$

Sean $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $y=(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, cualesquiera. Sabemos que

$$0 \leq |x_k+y_k| \leq |x_k| + |y_k| \qquad \forall k\in\mathbb{N} \quad (1)$$

y $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ son convergentes, por tanto

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (|x_k| + |y_k|)$$

también es convergente. Así, de (1) y el criterio de comparación concluimos que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k+y_k|$$

es convergente, i.e., $x+y \in \ell^1$. Además

$$\|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Caso 2: $p>1$. Sea $p\in(1,+\infty)$, cualquiera y $q\in(1,+\infty)$ el exponente conjugado de p $\left(q = \frac{p}{p-1}\right)$.

Sean $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $y=(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, cualesquiera. Definimos

$$w_k = x_k + y_k, \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

Así,

$$|w_k|^p = |x_k+y_k|\,|w_k|^{p-1}$$
$$\leq (|x_k|+|y_k|)\,|w_k|^{p-1} \qquad (2)$$

para $k\in\mathbb{N}$. Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} |w_k|^p \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|\,|w_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k|\,|w_k|^{p-1} \quad (3)$$

para $n\in\mathbb{N}$. De la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|\,|w_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^{q}\right)^{1/q} \quad (4)$$

y

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k|\,|w_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^{q}\right)^{1/q} \quad (5)$$

para cada $n\in\mathbb{N}$. Combinando (3), (4) y (5) se tiene que $(p-1)q=p$

$$\sum_{k=1}^{n} |w_k|^p \leq \left[\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}\right] \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

pues $(p-1)q=p$, para cada $n\in\mathbb{N}$. Por tanto,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left[\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

luego, como p y q son exponentes conjugados, se tiene que $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$, de donde, como $n\to+\infty$, obtenemos

$$0 \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |w_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

o, lo que es igual a

$$0 \leq \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

finalmente, como p es arbitrario, se tiene lo requerido $\square$

Corolario

Para cada $p\in[1,+\infty)$,

$$x+y \in \ell^p$$

para todo $x, y \in \ell^p$

Corolario

ℓ^p es un espacio vectorial, para cada $p\in[1,+\infty)$

Corolario

Para $p\in[1,+\infty)$, $\|\cdot\|: \ell^p \to \mathbb{R}$ es una norma para ℓ^p. Además

$$(\cdot,\cdot)_2 : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k y_k$$

define un producto interno sobre ℓ^2, con $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $y=(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Demostración

Sean $p\in[1,+\infty)$, $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $y=(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $\alpha\in\mathbb{R}$ cualquiera. Sabemos que

$$0 \leq |x_k|^p \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

Materia: Análisis Real
Tema: Espacios ℓ^p
Hoja 11 de

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|x_k\|_p.$$

Además, por la desigualdad de Minkowski, se sigue que

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Por otro lado,

$$\|\alpha x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha x_k|^p\right)^{1/p}$$

$$= \left(|\alpha|^{1/p} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

$$= |\alpha| \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

$$= |\alpha| \, \|x_k\|_p$$

Ahora, notemos que si $x=(0)_{k\in\mathbb{N}}$, tenemos que

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |0|^p\right)^{1/p} = 0$$

Al contrario, supongamos que

$$\|x\|_p^p = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad |x_k|^p \leq 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq |x_k|^p \leq 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad |x_k|^p = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad |x_k| = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Proposición:
Para cada $p,q \in (1,+\infty)$ tales que $p<q$, se tiene que $\ell^p \subsetneq \ell^q$.

Demostración
Sea $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, cualquiera. Como

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty$$

se tiene que

$$\left(\lim_{k\to+\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} = 0$$

y por tanto

$$\lim_{k\to+\infty} |x_k| = 0$$

Sabemos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_k| < 1 \qquad \forall k \geq k_0$$

Ahora, como $q-p>0$, se tiene que

$$|x_k|^{q-p} < 1 \qquad \forall k \geq k_0$$

Por tanto

$$0 \leq |x_k|^q < |x_k|^p \qquad \forall k \geq k_0$$

Como $x \in \ell^p$, del criterio de comparación, la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^q < +\infty$$

así $x \in \ell^q$. Como x es arbitrario,

$$\ell^p \subseteq \ell^q$$

Ahora, para cada $k\in\mathbb{N}$, escribimos

$$y_k := \frac{1}{k^{1/p}}$$

Así,
$$\sum_{k=1}^{+\infty} (y_k)^p = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

no es convergente, por tanto, $y=(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \notin \ell^p$

Además

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |y_k|^q = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{q/p}}$$

es convergente pues $q/p>1$ (Ejercicio, criterio integral y $y\in\ell^q$)

$$\ell^p \subsetneq \ell^q \qquad \square$$

Nota:
Vamos a asumir que la norma de un espacio vectorial normado E; $\|\cdot\| E \to \mathbb{R}$, es continua.
Sea $p\in[1,+\infty)$, arbitrario pero fijo. Para cada $i\in\mathbb{N}$ definimos

$$e_i (\delta_{ik})_{k\in\mathbb{N}}$$

Vemos que

$$\|e_i\|_p^p = \sum_{k=1}^{+\infty} |\delta_{ik}|^p = 1, \qquad \forall i \in \mathbb{N}$$

Así,

$$e_i \in \ell^p, \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Sea $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, cualquiera. Se tiene que

$$x=\sum_{k=1}^{+\infty} x_k e_k. \qquad (1)$$

Para cada $n\in\mathbb{N}$, tenemos que

$$\left\| x-\sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_p^p$$

$$=\| (x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n,x_{n+1},\dots)-(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n,0,0,0,0,\dots)\|_p^p$$

$$=\sum_{k=n+1}^{+\infty} |x_k|^p \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

En resumen

$$0\le \lim_{n\to+\infty} \left\| x-\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right\|_p = 0$$

$$\Rightarrow 0\le \left\| x-\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right\| = 0$$

$$\Rightarrow 0\le \left\| x-\sum_{k=1}^{+\infty} x_k e_k\right\| = 0$$

$$\Rightarrow x=\sum_{k=1}^{+\infty} x_k e_k$$

Decimos que $\{e_k : k\in\mathbb{N}\}\subseteq \ell^p$ es una base de Schauder de ℓ^p

$$E:\mathbb{N}\longrightarrow \ell^p$$
$$k\longmapsto E(k)=e_k$$

Espacio de Lebesgue ℓ^∞

Escribamos

$$\ell^\infty=\{x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R} : x \text{ es acotada}\}$$

Vemos que $\ell^\infty\neq\emptyset$, pues todas las sucesiones convergentes pertenecen a $\ell^{+\infty}$.

No es difícil ver que

$$\ell^p\subseteq\ell^\infty \qquad \forall p\in[1,+\infty)$$

pues las sucesiones en ℓ^p son convergentes a 0.

Sea $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $y=(y_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell^\infty$ y $\alpha\in\mathbb{R}$, cualesquiera. Tenemos que existen $M_1, M_2>0$ tales que

$$|x_k|\le M_1 \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$
$$|y_k|\le M_2 \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

De la desigualdad triangular, se sigue que

$$|x_k+y_k|\le M_1+M_2 \qquad \forall k\in\mathbb{N},$$

por tanto $x+y\in\ell^\infty$. Así mismo

$$|\alpha x_k|\le|\alpha|M_1 \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

por tanto $\alpha x\in\ell^\infty$.

Así, es un espacio vectorial con las operaciones usuales de sucesiones.

Notemos que si $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell^\infty$ entonces

$$\{|x_k| : k\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{R}$$

es un conjunto acotado. Por tanto

$$\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\longmapsto \|x\|_\infty=\sup\{|x_k| : k\in\mathbb{N}\}$$
$$=\sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k|,$$

está bien definido

Teorema:
La función $\|\ \|_\infty : \ell^\infty\longrightarrow\mathbb{R}$ define una norma sobre ℓ^∞

Demostración Pendiente.

~~Se tiene que~~
$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k|$.

Teorema: (Desigualdad de Hölder)
Se tiene que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k y_k|\le\|x\|_1\|y\|_\infty$$

para cada $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell^1$ y $y=(y_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell^\infty$

Demostración
Sean $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell^1$ y $y=(y_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell^{+\infty}$, cualesquiera. Notemos que

$$|y_k|\le\|y\|_\infty \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

Así,

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k|=\sum_{k=1}^{n}|x_k||y_k|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \|y\|_\infty$$
$$= \|y\|_\infty \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |y_k x_k| \leq \|y\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$$
$$= \|x\|_1 \|y\|_\infty \qquad \square$$

Ejemplo.

$$S = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \right)_{n \in \mathbb{N}} \qquad \text{creciente}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{existe}$$

$S \in \ell^\infty$

$$\|S\|_\infty = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} : n \in \mathbb{N} \right\} = 1$$

Notemos que

$$1 \notin \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

En $\|\cdot\|_\infty$ no siempre se alcanza el máximo

Topología de $\mathbb{R}^n$

Sea $n \in \mathbb{N}$, arbitrario pero fijo, $\mathbb{R}^n$ es el producto cartesiano n veces de $\mathbb{R}^1 := \mathbb{R}$

Escribimos

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x^n) : \underset{i=1,\ldots,n}{x^i \in \mathbb{R}} \}$$

$\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial real.

Para cada $p \in [1, +\infty)$, la función

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x = (x^1, \ldots, x^n) \longmapsto \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x^k|^p \right)^{1/p}$$

define una norma para $\mathbb{R}^n$.

En el caso $p = 2$ escribimos $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$ y la llamamos norma euclidiana para $\mathbb{R}^n$

También se tiene que

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(x^1, \ldots, x^n) \longmapsto \|x\|_\infty = \max \{ |x^k| : k = 1, \ldots, n \}$$
$$= \max_{k=1,\ldots,n} |x^k|$$

también define una norma.

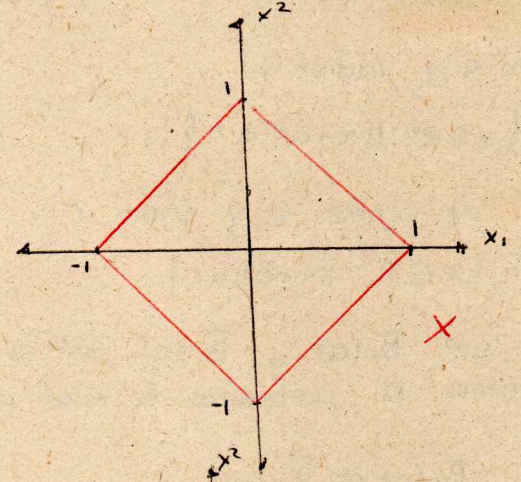
Nota:

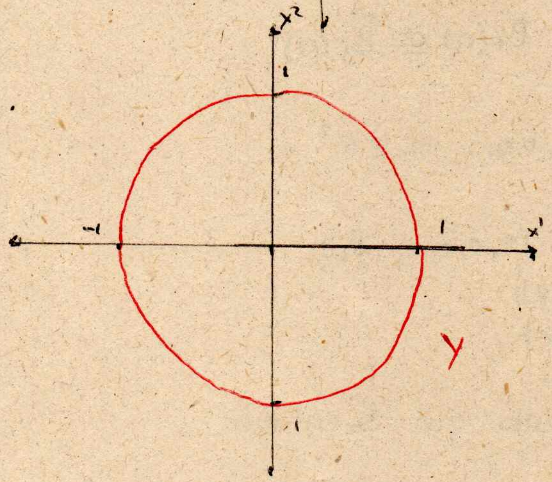
Consideremos

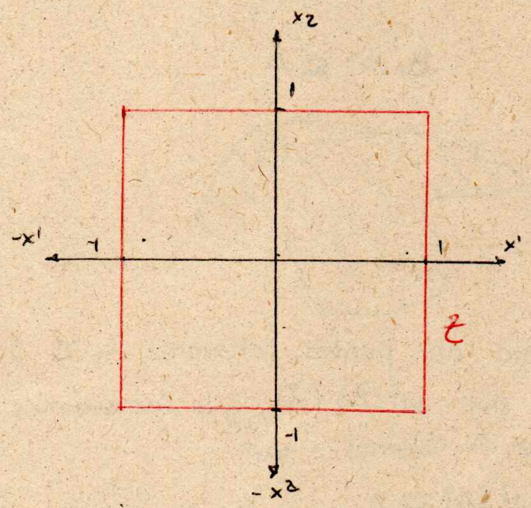
$$X := \{ x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 = 1 \}$$
$$= \{ x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : |x^1| + |x^2| = 1 \}$$

$$Y = \{ x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1 \}$$
$$= \{ x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{|x^1|^2 + |x^2|^2} = 1 \}$$

$$Z = \{ x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty = 1 \}$$
$$= \{ x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : \max \{ |x^1|, |x^2| \} \}$$







En adelante vamos a trabajar sobre el espacio euclideano. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$

Conjuntos abiertos

Dados un punto $a \in \mathbb{R}^n$ y $r>0$, definimos

1) Bola abierta

$$\left.\begin{array}{l}\{x\in\mathbb{R}^n : \|a-x\|<r\}\\ \{x\in\mathbb{R}^n : \|x-a\|<r\}\end{array}\right\} \Rightarrow B_r(a)$$

de radio r y centro a.

2) Bola cerrada de centro a y radio r

$$\overline{B}_r(a) = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x-a\| < r\}$$

3) Esfera de centro a y radio r

$$S_r(a) := \{x\in\mathbb{R}^n : \|x-a\| = r\}$$

Notemos que $B_r(a)$ y $\overline{B}_r(a)$ son no vacíos pues al menos a pertenece a estos conjuntos. Además

$$B_r(a) \subseteq \overline{B}_r(a)$$

Además

$$x = a + (1,0,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n$$

es tal que

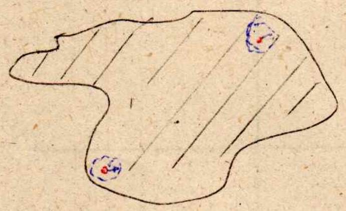
$$\begin{aligned}\|x-a\| &= \|(r,0,0,\dots,0)\|\\ &= \|r\|\\ &= |r|\\ &= r,\end{aligned}$$

lo que muestra que $S_r(a) \neq \emptyset$.

Definición

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío. Decimos que $a \in A$ es un punto interior de A cuando existe $r>0$ tal que

$$B_r(a) \subseteq A$$



Al conjunto de puntos interiores de A lo denotamos por $\text{int}(A)$ $(\mathring{A})$, y lo llamaríamos interior de A. Vemos que

$$\text{int}(A) \subseteq A$$

Decimos que A es abierto cuando todos sus puntos son puntos interiores, i.e,

$$\text{int}\, A = A$$

Nota:
Puesto que para cualquier conjunto A,

$$\text{int}\, A \subseteq A$$

si queremos probar que A es abierto, basta probar que

$$A \subseteq \text{int}(A)$$

Ejemplos

1) Sean $a \in \mathbb{R}^n$ y $r>0$, cualesquiera. Puesto que

$$B_r(a) \subseteq \mathbb{R}^n$$

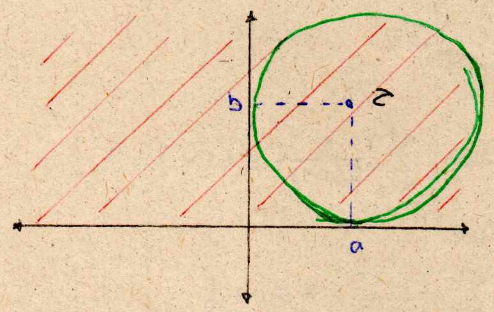
se tiene que a es un punto interior de $\mathbb{R}^n$. Puesto que a es arbitrario, todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ son puntos interiores.

$$\text{int}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$$

i.e, $\mathbb{R}^n$ es abierto.

2) Consideremos el semiplano

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$$



para ello, tomemos $\tau = (a,b) \in A$ tal que $b>0$, cualquiera. Vamos a probar que

$$B_b(\tau) \subseteq A.$$

Sea $(x,y) \in B_b(\tau)$, cualquiera.
P.D. $y \geq 0$.
Sabemos que

$$\|(x,y) - \tau\| < b$$
$$\Rightarrow |x-a|^2 + |y-b|^2 < b^2$$
$$|y-b|^2 \leq |x-a|^2 + |y-b|^2 < b^2$$
$$\Rightarrow |y-b| < b$$
$$\Rightarrow -b < y-b < b$$
$$\Rightarrow 0 < y < 2b.$$
$$\Rightarrow y > 0$$
$$\Rightarrow (x,y) \in A.$$

Como $(x,y) \in B_b(\tau)$ es arbitrario, se sigue que $B_b(\tau) \subseteq A$. τ es ~~conju~~ punto interior de A.

Por tanto

$$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : b>0\} \subseteq \text{int}\, A.$$

Ahora, consideremos $\sigma = (c,d) \in A$, tal que $d=0$, cualquiera.

Materia: Análisis Real
Tema: Topología en $\mathbb{R}^n$
Hoja 13 de

P.D.
$\sigma \not\in int(A)$

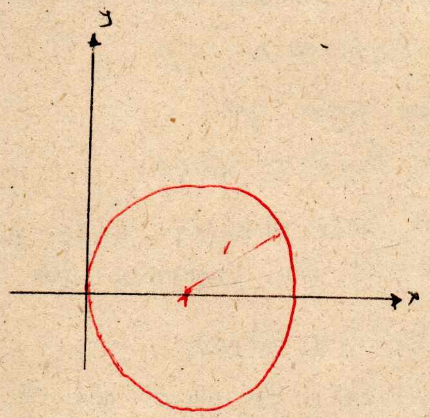
Supongamos que $\sigma \in int(A)$. Así, existen $r>0$ tal que
$$B_r(\sigma) \subseteq A$$
De este modo para cada $(x,y) \in B_r(\sigma) \subseteq A$, se tiene que
$|y|^2 < |x-c|^2 + |y|^2$.
En particular, $(x, -r/2) \in B_r(a)$ pero como $-r/2 < 0$, $(x, -\frac{r}{2}) \not\in$, lo cual contradice. Así
$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=0\}$ no es un subconjunto de int. A.
En resumen A es abierto.

Martes 27 de Noviembre de 2019

Ejemplo.
Sabemos que un conjunto no es abierto cuando existe al menos uno de sus puntos que no sean interiores.
El vacío como subconjunto de $\mathbb{R}^n$, no tiene puntos que no sean interiores, así, podemos convenir que $\emptyset \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto, para cada $n \in \mathbb{N}$

Ejemplo Dado cualquier $a = (a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n$ el conjunto $\{a\}$ no es abierto.

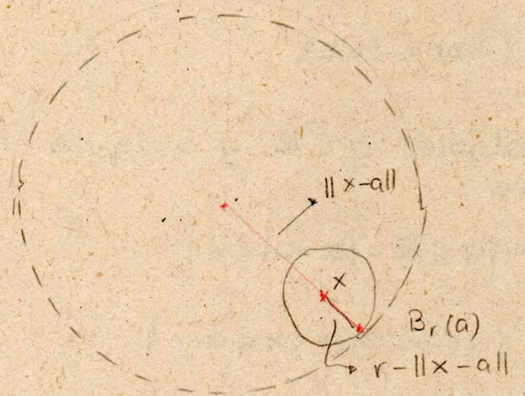
Nota.



En efecto, supongamos que $\{a\}$ es abierto. Así, a es un punto interior de $\{a\}$, i.e., existe $r>0$ tal que
$$B_r(a) \subseteq \{a\}$$
Vemos que
$$b = (b^1, b^2, \dots, b^n) = \left(a^1 + \frac{r}{4\sqrt{n}}, a^2 + \frac{r}{4\sqrt{n}}, \dots, a^n + \frac{r}{4\sqrt{n}}\right)$$
es tal que
$$\|a-b\| = \sqrt{(a^1-b^1)^2 + (a^2-b^2)^2 + \dots + (a^n-b^n)^2}$$
$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{r^2}{16n}}$$
$$= \sqrt{\frac{nr^2}{16}}$$
$$= \frac{r}{4}$$
lo que muestra que $b \in B_r(a)$, así $b \in \{a\}$, así $a=b$ lo cual no es cierto. Por tanto, $\{a\}$ no es abierto.
Además
$$int(\{a\}) = \emptyset$$
conjunto finito no tiene puntos interiores.

Proposición
Para todo $a \in \mathbb{R}^n$ y todo $r>0$, $B_r(a)$ es un conjunto abierto

Demostración
Sean $a \in \mathbb{R}^n$ y $r>0$ cualesquiera.
P.D. $B_r(a)$ es abierto
P.D. Todos los puntos de $B_r(a)$ son interiores
Sea $x \in B_r(a)$, cualquiera.
P.D. Existe $r_1 > 0$ tal que $B_{r_1}(x) \subseteq B_r(a)$



Tomemos $r_1 = r - \|x-a\|$. Puesto que $x \in B_r(a)$, tenemos que
$$\|x-a\| < r$$
$\Rightarrow$
$$r_1 = r - \|x-a\| > 0$$
Verifiquemos que $B_{r_1}(x) \subseteq B_r(a)$
Sea $y \in B_{r_1}(x)$, cualquiera
P.D. $\|y-a\| < r$
De la desigualdad triangular, $y \in B_{r_1}(x)$, tenemos que
$$\|y-a\| = \|y-x+x-a\|$$
$$\leq \|y-x\| + \|x-a\|$$
$$< r_1 + \|x-a\|$$
$$= r$$

$\Rightarrow \|y-a\|<r \Rightarrow y\in B_r(a)$.

Como $y\in B_{r_1}(x)$ es arbitrario, se sigue que $B_{r_1}(x)\subseteq B_r(a)$, lo que muestra que x es un punto interior de $B_r(a)$. Además, como $x\in B_r(a)$ es arbitrario, todo elemento de $B_r(a)$ es un punto interior, i.e., $B_r(a)$ es un conjunto abierto.

Así

$$\text{int}\left(B_r(a)\right) = B_r(a)$$

□

Ejemplo

Consideremos el intervalo abierto $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$.

Cuando $a=b$, $(a,b)\neq\emptyset$, así (a,b) es abierto.

Cuando $a<b$, tenemos que

$$\begin{aligned}(a,b) &= \{x\in\mathbb{R} : a<x<b\}\\ &= \left\{x\in\mathbb{R} : \left|x-\frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2}\right\}\\ &= B_{\frac{b-a}{2}}\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

como $B_{\frac{b-a}{2}}\left(\frac{a+b}{2}\right)\subseteq\mathbb{R}$ es abierto, se sigue que al ser iguales, (a,b) es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$.

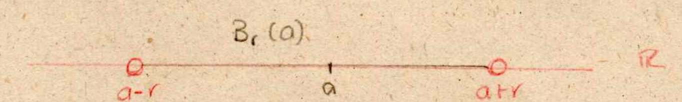
Así,

$$\text{int}(a,b) = (a,b).$$

Nota.

Dado cualquier $a\in\mathbb{R}$ y cualquier $r>0$, vemos que

$$\begin{aligned}B_r(a) &= \{x\in\mathbb{R} : |x-a|<r\}\\ &= \{x\in\mathbb{R} : a-r<x<a+r\}\\ &= (a-r,a+r).\end{aligned}$$



← vista gráfica de una bola de centro a y radio r en $\mathbb{R}$

Lema

Sean $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ tales que $A\subseteq B$. Se tiene que

$$\text{int}(A)\subseteq\text{int}(B) \qquad (1)$$

Demostración

Supongamos que $\text{int}(A)=\emptyset$, se tiene que

$$\emptyset = \text{int}(A)\subseteq\text{int}(B)$$

esto muestra que (1) se cumple.

Supongamos que $\text{int}(A)\neq\emptyset$. Sea $x\in\text{int}(A)$ cualquiera,

P.D. $x\in B$

P.D. Existe $r>0$ tal que $B_r(x)\subseteq B$

Como $x\in\text{int}(A)$, existe $r>0$, tal que

$$B_r(x)\subseteq A \qquad (2)$$

y como $A\subseteq B$, se sigue que

$$B_r(x)\subseteq B \qquad (3)$$

vemos de 2 que $x\in B_r(x)\subseteq A$, así $x\in B$.

Como $x\in B$ y (3) se verifica, se tiene que

$$x\in\text{int}(B).$$

Como x es arbitrario, se sigue que

$$\text{int}(A)\subseteq\text{int}(B)$$

□

Teorema

Para cualquier $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $\text{int}(A)$ es abierto.

Demostración

Sea $A\subseteq\mathbb{R}^n$ cualquiera.

En caso de que $\text{int}(A)=\emptyset$, como $\emptyset$ es abierto entonces $\text{int}(A)$ es abierto.

Supongamos que $\text{int}(A)\neq\emptyset$

P.D. $\text{int}(A)$ es abierto

Sea $x\in\text{int}(A)$ cualquiera

P.D. Existe $r>0$ tal que

$$B_r(x)\subseteq\text{int}(A)$$

Como $x\in\text{int}(A)$, existe $r_1>0$ tal que

$$B_{r_1}(x)\subseteq A$$

De aquí, se sigue que

$$\text{int}\, B_{r_1}(x)\subseteq\text{int}(A),$$

y como $\text{int}\, B_{r_1}(x) = B_{r_1}(x)$ (pues $B_{r_1}(x)$ es un conjunto abierto). Así, tenemos que

$$B_{r_1}(x)\subseteq\text{int}(A).$$

Tomando $r=r_1>0$, se sigue que x es un punto interior del $\text{int}(A)$. Como x es arbitrario, se sigue que $\text{int}(A)$ es un conjunto abierto.

Nota.

Tenemos que

$$\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$$

para todo $A\subseteq\mathbb{R}^n$

Materia: Análisis Real
Tema: Familias.
Hoja 14 de

Proposición

Consideremos $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y

$$\mathcal{F} = \{B \subseteq A : B \text{ es abierto}\}$$

Se tiene que

$$\operatorname{int}(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B$$

Demostración

Sabemos que $\operatorname{int}(A)$ es abierto y también

$$\operatorname{int}(A) \subseteq A,$$

así $\operatorname{int}(A) \in \mathcal{F}$ y por tanto $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Puesto que $\operatorname{int}(A) \in \mathcal{F}$ se tiene que

$$\operatorname{int}(A) \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \qquad (1)$$

Así basta verificar que

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subseteq \operatorname{int}(A) \qquad (2)$$

Sabemos que

$$B \subseteq A \qquad \forall B \in \mathcal{F}$$

entonces

$$\operatorname{int}(B) \subseteq \operatorname{int}(A) \qquad \forall B \in \mathcal{F}$$

luego

$$\operatorname{int}(B) = B \subseteq \operatorname{int}(A) \qquad \forall B \in \mathcal{F}$$

pues cada $B \in \mathcal{F}$ es abierto. Así

$$B \subseteq \operatorname{int}(A) \qquad \forall B \in \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subseteq \operatorname{int}(A).$$

lo que muestra (2). Combinando (1) y (2) se sigue que

$$\operatorname{int}(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B.$$

Gracias a este resultado, podemos decir que $\operatorname{int}(A)$ es el abierto más grande contenido en A. □

Definición

Sean Θ (tetha) y H conjuntos no vacíos. Una familia es una función

$$\mathcal{L} : \Theta \longrightarrow H$$
$$\theta \longmapsto \mathcal{L}(\theta) =: \mathcal{L}_\theta$$

a la cual denotamos

$$\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_\theta\}_{\theta \in \Theta}$$

A Θ le llamamos el conjunto de índices, el cual puede ser finito, infinito numerable o no numerable.

En caso de que $\Theta = \mathbb{N}$, usamos la palabra sucesión de elementos en H, en lugar de familia de elementos en H

Teorema.

i) Si $\{A_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ es una familia de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ entonces

$$\bigcup_{\theta \in \Theta} A_\theta \quad \text{es abierto.}$$

ii) Si $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq \mathbb{R}^n$ son abiertos, entonces la intersección finita

$$\bigcap_{k=1}^{m} A_k \quad \text{es abierto.}$$

Demostración (i)

Escribimos

$$S = \bigcup_{\theta \in \Theta} A_\theta$$

P.D. $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto

Si $S = \emptyset$, entonces S es abierto.

Supongamos que $S \neq \emptyset$. Sea $a \in S$, cualquiera.

P.D. Existe un $r>0$ tal que

$$B_r(a) \subseteq S$$

Como $a \in S$, existe $\theta^* \in \Theta$ tal que

$$a \in A_{\theta^*}$$

Puesto que $A_{\theta^*} \ni a$, sabemos que existe un $r>0$ tal que

$$B_r(a) \subseteq A_{\theta^*} \subseteq S,$$

entonces

$$B_r(a) \subseteq S,$$

lo que muestra que a es un punto interior de S. Como a es arbitrario concluimos que S es abierto.

Demostración (ii)

Escribimos

$$T := \bigcap_{k=1}^{m} A_k = A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_m$$

P.D. T es abierto

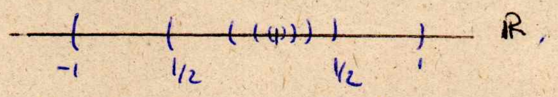
Cuando $T = \emptyset$, vemos que T es abierto

Supongamos $T \neq \emptyset$. Sea $a \in T$ cualquiera

P.D. Existe $r>0$ tal que
$$B_r(a) \subseteq T.$$
Como $a \in T$, vemos que
$$a \in A_k, \quad \forall k=1,\ldots,m$$
Puesto que A_k es abierto, existe $r_k>0$ tal que
$$B_{r_k}(a) \subseteq A_k, \quad \forall k=1,\ldots,m \quad (1)$$
Definamos $r=\min\{r_1,r_2,\ldots,r_m\}=\min\limits_{k=1,2,\ldots,m} r_k>0$, así
$$B_r(a) \subseteq B_{r_k}(a) \quad \forall k=1,\ldots,m \quad (2)$$
usando (1) y (2) obtenemos que
$$B_r(a) \subseteq A_k \quad \forall k=1,\ldots,m$$
$$\Rightarrow B_r(a) \subseteq \bigcap_{k=1}^{m} A_k = T.$$
Esto muestra que a es un punto interior de T. Como a es arbitrario, se sigue que T es abierto.

¿Qué pasa con la intersección arbitraria de abiertos? ¿Es un abierto?

Consideremos la familia
$$\mathcal{N}=\{(-\tfrac{1}{k},\tfrac{1}{k}) : k \in \mathbb{N}\}$$
$$=\{(-\tfrac{1}{k},\tfrac{1}{k})\}_{k\in\mathbb{N}}$$
Tenemos que cada $(-\frac{1}{k},\frac{1}{k})$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$.
Además
$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right) = \{0\}$$



en donde $\{0\}$ no es abierto.

Leer la sección 5.3

Sucesiones

Definición
Una sucesión de puntos en $\mathbb{R}^n$ es una función
$$x: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$k \longmapsto x(k) =: x_k,$$
la cual escribimos como
$$x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$$
Ejemplo
Consideremos $c \in \mathbb{R}^n$ arbitrario pero fijo.
A la sucesión constante c
$$x=(c)_{k\in\mathbb{N}}=(c,c,c,\ldots)$$
le llamamos la sucesión constante c

Definición
Decimos que una sucesión $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de puntos en $\mathbb{R}^n$ es acotada cuando existe $M>0$ tal que
$$\|x_k\|<M \quad \forall k\in\mathbb{N}$$
Notemos que $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotada si y sólo si
$$x \in \overline{B}_M(0) \quad \forall k\in\mathbb{N}$$
para algún $M>0$

Viernes 29 de Noviembre de 2019.

Sabemos que $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotada cuando existe $M>0$ tal que
$$\|x_k\| \leq M \quad \forall k\in\mathbb{N}$$
i.e., el conjunto
$$Rg(x) := \{x_k : k\in\mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$
es acotado. Esto es equivalente a decir que existe $M>0$ tal que
$$x_k \in B_M(0) \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$
Ejemplo
Cosideremos en $\mathbb{R}^2$
$$x=\left(\left((-1)^k,\frac{1}{k}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$$
$$=: \left((-1)^k, 1/k\right)_{k\in\mathbb{N}}$$
¿Es x acotada? Aquí
$$x_k = \left((-1)^k, 1/k\right), \quad k\in\mathbb{N}.$$
Vemos que
$$\|x_k\| = \sqrt{((-1)^k)^2+(1/k)^2} = \sqrt{1+(1/k)^2} \quad \forall k\in\mathbb{N}$$
$$\leq \sqrt{1+1}$$
$$=\sqrt{2},$$
así
$$\|x_k\| \leq \sqrt{2} \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

Materia: Análisis Real
Tema: Sucesiones en $\mathbb{R}^n$
Hoja: 15 de

Definición Sean $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en $\mathbb{R}^n$ y $x_*\in\mathbb{R}^n$. Decimos que x converge a x_* cuando para todo $\varepsilon>0$ existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\|x_k-x_*\|<\varepsilon \qquad \forall k\geq k_0.$$

En este caso escribimos $x_*=\lim_{k\to+\infty} x_k$ y decimos que x_k es el límite de la sucesión x.
Notemos que $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^n$ converge a $x^*\in\mathbb{R}^n$ si y solo si para todo $\varepsilon>0$, existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$x_k\in B_\varepsilon(x_*) \qquad \forall k\geq k_0$$

Notemos además que $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}^n$ converge a $x_*\in\mathbb{R}^n$ si y solo si $(\|x_k-x_*\|)_{k\in\mathbb{N}}$ $(\|x_k-x_*\|)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ converge a 0.

Proposición
Sean $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}^n$ y $x_*\in\mathbb{R}^n$, el límite de x. Se tiene que
1) x es acotado;
2) x_* es único.

Esquema
$\exists k_0\in\mathbb{N}$ tal que
$\|x_k\|-\|x_*\|\leq\|x_k-x_*\|<1 \qquad \forall k\geq k_0$

Ejercicio.
2) Supongamos que existe $u^*\in\mathbb{R}^n$ que también es el límite de x
P.D.
$$u_*=u_*$$
Supongamos que existe $u_*\in\mathbb{R}^n$ $u_*\neq x_k$, que también es el límite de x.
P.D.
No sabemos todavía

Sea $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}^n$, arbitraria pero fija. Vemos que $x_k\in\mathbb{R}^n$, para cada $k\in\mathbb{N}$. Así

$$x_k=(x_k^1,x_k^2,\dots,x_k^n)\in\mathbb{R}^n,$$

para cada $k\in\mathbb{N}$

$$x_1=(x_1^1,x_1^2,\dots,x_1^n)$$
$$x_2=(x_2^1,x_2^2,\dots,x_n^2)$$
$$x_3=(x_1^1,x_2^2,\dots,x_n^2)$$
$$\vdots$$
$$x_k=(x_k^1,x_k^2,\dots,x_k^n)$$

$(x_k^1)_{k\in\mathbb{N}}$ $(x_k^2)_{k\in\mathbb{N}}$ $(x_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ Sucesiones de sucesiones

De este modo obtenemos n sucesiones de números reales

$$(x_k^1)_{k\in\mathbb{N}},\dots,(x_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$$

Proposición
Sean $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}^n$ y $x_*=(x_*^1,x_*^2,\dots,x_*^n)\in\mathbb{R}^n$
Se tiene que

$$x_*=\lim_{k\to\infty}x_k$$

si y solo si

$$x_*^j=\lim_{k\to\infty}x_k^j$$

para cada $j=1,\dots,n$. Así,

$$\lim_{k\to+\infty}x_k=\lim_{k\to+\infty}(x_k^1,x_k^2,\dots,x_k^n)$$
$$=\left(\lim_{k\to+\infty}x_k^k,\lim_{k\to+\infty}x_k^2,\dots,\lim_{k\to\infty}x_k^n\right)$$

Demostración
Recordemos que para cada $w=(w^1,\dots,w^n)\in\mathbb{R}^m$ se tiene que

$$(1)\ |w^k|\leq\sqrt{\sum_{k=1}^n(w^k)^2}=\|w\| \qquad \forall k=1,2,\dots,n) \quad (1)$$

Sea $\varepsilon>0$ cualquiera
$\Rightarrow$ Notemos que

$$\lim_{k\to\infty}x_k=x_* \quad (1)$$

lo que, por la definición, es equivalente a que para todo $\varepsilon>0$, existe un $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\|x_*-x_k\|<\varepsilon \qquad \forall k\geq k_0 \quad (2)$$

$$\|(x_*^1-x_k^1,\dots,x_*^n-x_k^n)\|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_*^1-x_k^1)^2+\dots+(x_*^n-x_k^n)} \quad (3)$$

luego, por (1), se tiene que

$$|x_*^i-x_k^i|<\varepsilon \qquad \forall k\geq k_0 \quad (4)$$

con $j=1,2,\dots,n$

como ε es arbitrario, (4) muestra que

$$(x_k^j)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge a } x_*^j$$

para cada $j=1,2,\ldots,n$

($\Leftarrow$) Sea $\varepsilon>0$, cualquiera. Supongamos que

$$x_*^j = \lim_{k\to\infty} x_k^j \qquad (5)$$

para $j=1,2,\ldots,n$.

P.D.

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_*$$

P.D. $\forall \varepsilon>0\ \exists k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\|x_k - x_*\| < \varepsilon \qquad \forall k>k_0.$$

(Sea $\varepsilon>0$, cualquiera) Sea $j=1,\ldots,n$ cualquiera de (5), existe $k_{0_j}\in\mathbb{N}$ tal que

$$|x_k^j - x_*^j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \qquad \forall k\geq k_{0_j}$$

Tomando

$$k_0 = \max\{k_{0_1}, k_{0_2}, \ldots, k_{0_n}\}$$

$$= \max_{j=1,2,\ldots,n} k_{0_j} \in \mathbb{N},$$

se sigue que

$$|x_k^j - x_*^j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \qquad \forall k\geq k_0 \quad \forall j=1,2,\ldots,n$$

$$\Rightarrow |x_k^j - x_*^j|^2 < \frac{\varepsilon^2}{n} \qquad \forall k\geq k_0 \quad \forall j=1,2,\ldots,n$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n |x_k^j - x_*^j|^2 < \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2 \qquad \forall k\geq k_0$$

$$\Rightarrow \|x_k - x_*\| < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon \qquad \forall k\geq k_0$$

luego, como ε es arbitrario, entonces

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_*$$

Miércoles, 4 de diciembre de 2019.

Corolario:

Dadas sucesiones $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $y=(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ convergentes a x_* y $y_*\in\mathbb{R}^n$, respectivamente. Se tiene que

"Usando sucesiones componentes"

$$\lim_{k\to\infty} (\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha x_* + \alpha y_*$$

Demostración: Ejercicio ✓

Ejemplos

1) Sea $c=(c^1,c^2,\ldots,c^n)\in\mathbb{R}^n$ arbitrario pero fijo.

$$\lim_{k\to+\infty} c = \lim_{k\to\infty} (c^1, c^2, \ldots, c^n) \quad \text{¿existe componente a componente?}$$

$$= \left(\lim_{k\to+\infty} c^1, \lim_{k\to+\infty} c^2, \ldots, \lim_{k\to+\infty} c^n\right)$$

$$= (c^1, c^2, \ldots, c^n)$$

$$= c$$

2)
$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{(-1)^k}{k}, \left(1+\frac{1}{k}\right)^k, \frac{\operatorname{sen}(k^2)}{\sqrt[3]{k}}, \sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)}, \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i}\right)$$

sucesión en $\mathbb{R}^5$

$$= (0, e, 0, 1, 1)$$

Definición.

Decimos que una sucesión $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de puntos en $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy cuando para todo $\varepsilon>0$, existe un $k_0\in\mathbb{N}$, tal que

$$\|x_k - x_j\| < \varepsilon \qquad \forall k,j\geq k_0$$

Proposición

Sea $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en $\mathbb{R}^n$. Se tiene que x es de Cauchy (en $\mathbb{R}^n$) si y solo si $(x_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, para cada $i=1,\ldots,n$.

Demostración: Ejercicio ✓

Teorema.

Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy si y solo si es convergente.

Demostración: Ejercicio ✓

Este teorema que acabamos de escribir, hace que $\mathbb{R}^n$ reciba el nombre de Espacio vectorial normado completo.

Nota:

Cuando un espacio vectorial normado tiene la propiedad de que todas sus sucesiones de Cauchy sean convergentes recibe el apelativo de ser completo. Decimos que ese espacio vectorial normado completo es un espacio de Banach.

Puntos de adherencia y conjunto cerrado.

~~Dada una sucesión $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$~~

Dados $A\subseteq\mathbb{R}^n$, no vacío, y $a\in\mathbb{R}^n$, decimos que a es un punto de adherencia de A cuando existe una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de puntos en $\mathbb{R}^n$ tal que

Materia	Análisis Real
Tema	Conjuntos cerrados.
Hoja	16 de

i) $x_k \in A$, $\forall k \in \mathbb{N}$ ii) $a = \lim_{k\to+\infty} x_k$

$[x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A]$

Al conjunto Definición - Punto de adherencia-

$\bar{A} := \{a \in \mathbb{R}^n : a \text{ es un punto de adherencia de } A\}$

le llamamos la clausura de A. (la adherencia de A)

Cuando todos los elementos de A son puntos de clausura (o de adherencia) decimos que A es cerrado, i.e., A es cerrado si y solo si

$$A = \bar{A}$$

Ejemplos

1) Sea $a \in \mathbb{R}^n$, arbitrario pero fijo.

Escribimos

$A = \{a\}$.

Vemos que $(a)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos en A y convergente a a.

Así $a \in \overline{\{a\}}$. Además

$$A = \{a\} \subseteq \bar{A} = \overline{\{a\}}$$

Sea $b \in \bar{A}$, cualquiera. Existe $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A = \{a\}$ tal que

$$b = \lim_{k\to+\infty} x_k.$$

Así, $x_k = a$ $\forall k \in \mathbb{N}$, por tanto

$$b = \lim_{k\to+\infty} x_k = \lim_{k\to+\infty} a = a.$$

De este modo

$$\bar{A} \subseteq A$$

y, en consecuencia.

$$\bar{A} = A$$

por tanto $A = \{a\}$ es cerrado.

Nota)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, cualquiera. Vemos que para cada $a \in A$ existe una sucesión, en A, la constante convergente a a. Así

$$\boxed{A \subseteq \bar{A}}$$

2) ¿Es $\mathbb{R}^n$ cerrado?

Para cada $a \in \mathbb{R}^n$ existe una sucesión en $\mathbb{R}^n$, la constante, convergente a a. Así, cada punto de $\mathbb{R}^n$ es un punto de adherencia de $\mathbb{R}^n$, por tanto, $\mathbb{R}^n$ es cerrado, i.e., $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ es abierto y cerrado al mismo tiempo

3) Consideremos el conjunto $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$. Sabemos que $(0,1)$ es abierto y además $(0,1) \subseteq \overline{(0,1)}$

Notemos que

$$\left(\frac{1}{k}\right)_{k=2}^{\infty}, \left(\frac{k}{1+k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (0,1)$$

son tales que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0 \quad y \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k+1} = 1$$

que muestra que

$$0, 1 \in \overline{(0,1)}$$

pero $0, 1 \notin (0,1)$. Así $(0,1)$ no es cerrado.

4) Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ tales que $\|x\| = r$. Probemos que $x \in \overline{B_r(0)}$ a pesar de que $x \notin B_r(0)$ (así $B_r(0)$ no es cerrado)

Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$x_k = x - \frac{1}{k}x = \left(1 - \frac{1}{k}\right)x,$$

así

$$\|x_k\| = \left|1 - \frac{1}{k}\right| \|x\|$$

$$= \left|1 + \frac{1}{k}\right| r < r$$

por tanto

$$(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq B_r(0)$$

tal que

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x.$$

Así, $x \in \overline{B_r(0)}$

Definición - Vecindad -

Dado un punto $a \in \mathbb{R}^n$, decimos que $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es una vecindad de (entorno) de a cuando se satisface que $a \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ es abierto. Escribimos

$$\mathcal{N}_a := \{U \subseteq \mathbb{R}^n : U \text{ es una vecindad de } a\}$$

el conjunto de vecindades de a, el cual es no vacío pues $\mathbb{R}^n$ es abierto y $B_r(a) \in \mathcal{N}_a$, para cada $r > 0$. es decir $B_r(a) \subseteq \mathcal{N}_a$

Teorema

Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y $a \in \mathbb{R}^n$. Tenemos que $a \in \bar{A}$ si y sólo si

$$\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset \quad \forall \mathcal{U} \in \mathcal{N}_a$$

Demostración

$\Rightarrow$ Supongamos que $a \in \bar{A}$

P.D. $\mathcal{U} \cap A \neq$ $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{N}_a$ ← para todo, tomamos uno arbitrario

Como $a \in \bar{A}$, existe una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A$

$$a = \lim_{k \to +\infty} x_k$$

Así, para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

(1) $$x_k \in B_\varepsilon(a) \qquad \forall k \geq k_0$$ ← definición de límite

Sea $\mathcal{U} \in \mathcal{N}_a$ cualquiera. Sabemos que $a \in \mathcal{U}$ es abierto, así a es un punto interior de $\mathcal{U}$, existe $r > 0$ tal que

$$B_r(a) \subseteq \mathcal{U}$$

Por (1), sabemos que para $r > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_k \in B_r(a) \subseteq \mathcal{U} \qquad \forall k \geq k_0$$

Por tanto,

$$x_k \in A \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

y

$$x_k \in \mathcal{U} \qquad \forall k \geq k_0.$$

Así,

$$x_k \in \mathcal{U} \cap A \qquad \forall k \geq k_0$$

es decir

$$\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$$

Como $\mathcal{U}$ es arbitrario, hemos demostrado que

$$\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset \qquad \forall \mathcal{U} \in \mathcal{N}_a$$

Como $\mathcal{U}$ es arbitrario, hemos demostrado que

$$\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset \qquad \forall \mathcal{U} \in \mathcal{N}_a.$$

$\Leftarrow$) Supongamos que

$$\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset \qquad \forall \mathcal{U} \in \mathcal{N}_a \qquad (2)$$

P.D. $a \in \overline{A}$

P.D. Debemos hallar una sucesión de elementos en A convergente a a

En particular, de (2), se sigue que

$$B_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Así, para cada $k \in \mathbb{N}$

$$B_{1/k}(a) \cap A \neq \emptyset$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe

$$x_k \in B_{1/k}(a) \cap A,$$

así

$$(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in A$$

es una sucesión tal que

$$x_k \in B_{1/k}(a) \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \|x_k - a\| < 1/k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

por el teorema del sánduche, se sigue que

$$0 \leq \lim_{k \to \infty} \|x_k - a\| \leq \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} \|x_k - a\| = 0 \Rightarrow x_k = a.$$

i.e.,

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = a$$

En resumen, hemos construido una sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

- $x_k \in A \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $a = \lim_{k \to \infty} x_k$,

por tanto $a \in \overline{A}$

Corolario

Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y $a \in \mathbb{R}^n$. Se tiene que $a \in \overline{A}$ si y solo si existe $\mathcal{U} \in \mathcal{N}_a$ tal que $\mathcal{U} \cap A = \emptyset$.

Ejemplo

Consideremos $A := (a,b) \subseteq \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ con $a<b$.
¿Qué puntos están en $\overline{A}$?

Todos los puntos en A ($A \subseteq \overline{A}$)

a, b $\qquad \overline{A} = [a,b] = \{a,b\} \cup (a,b)$

¿$t \in \overline{A}$? No

Vemos que $r = a - t > 0$,

P.D. $B_r(t) \cap (a,b) = \emptyset$

Supongamos que

$$B_r(t) \cap (a,b) \neq \emptyset$$

de donde se tiene que $\qquad x \in B_r(t)$

$$(t - r, t + r) \cap (a,b) \qquad \|x - t\| < r$$

$$(t - a + t, t + a - t) \cap (a,b) \qquad -r < |x - t| < r$$

$$(2t - a, a) \cap (a,b)$$

luego si $\qquad x < a < x \Rightarrow \Leftarrow$

$$x \in (2t - a, a)$$

$$2t - a < x < a \qquad y \qquad x \in (a,b) \qquad a < x < a$$

$$x \in B_r(t) \Leftrightarrow \|t - a\| < r$$

$$\|$$

$\overline{A} = \overline{[a,b]}$

$\overline{A}$ es cerrado, i.e., $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Así, $\overline{[a,b]} = [a,b]$ por tanto $[a,b]$ es cerrado

Nota:

Se tiene que para cada $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(-\infty, a) \quad y \quad (b, +\infty)$$

son abiertos

$$[a,b] = \left((-\infty, a) \cup (b, +\infty) \right)^c$$

$[a,b]$ es cerrado

$(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ es abierto

Materia Análisis Real
Tema
Hoja 17 de

Teorema
Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A es cerrado si y solo si A^c es abierto.

Demostración.
$\Rightarrow$) Supongamos que A es cerrado
P.D. A^c es abierto
Cuando $A^c = \emptyset$, A^c es abierto
Supongamos $A^c \neq \emptyset$
P.D. Todos los elementos de A^c son interiores.
Sea $x \in A^c$, cualquiera.
P.D: $\exists r>0$ tal que $B_r(x) \subseteq A^c$
Como A es cerrado, $A = \bar{A}$, así $x \notin \bar{A}$. Por tanto existe $U \in \mathcal{N}_x$ tal que

$$U \cap A = \emptyset \quad (1)$$

Como U es abierto y $x \in U$, entonces $\exists r>0$ tal que

$$B_r(x) \subseteq U \quad (2)$$

De (1), se sigue que

$$U \subseteq A^c,$$

que junto con (2), se tiene que

$$B_r(x) \subseteq A^c$$

lo que muestra que $x \in A^c$ es un punto interior de A^c.
Como x es arbitrario, todos los elementos de A^c son interiores y así A^c es abierto.
$\Leftarrow$)
Supongamos que A^c es abierto
P.D. A es cerrado
Cuando $A^c \neq \emptyset$, $A = \mathbb{R}^n$ es cerrado.
Supongamos que $A^c \neq \emptyset$, como A^c es abierto, para cada $x \in A^c$ existe un $r_x > 0$ tal que

$$B_{r_x}(x) \subseteq A^c$$

por tanto

$$B_{r_x}(x) \cap A = \emptyset$$

Esto muestra que ningún punto de A^c es un punto adherente a A. Por tanto, todos los puntos de adherencia de A pertenecen a A, así A es cerrado.

Corolario
Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ cualquiera, se tiene que A^c es cerrado, si y solo si A es abierto.

Ejemplo
Recordemos que $\mathbb{R}^n$ es abierto, por tanto $\emptyset$ es cerrado.
Así, $\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$ son abiertos y cerrados al mismo tiempo. Más adelante, vamos a demostrar que $\mathbb{R}^n$ y (vacío) $\emptyset$ son los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ con esta propiedad

- Sean $a \in \mathbb{R}^n$, $r>0$, arbitrarios pero fijos.

$$(B_r(a))^c = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| \geq r\}$$

es cerrado, pues es el complemento abierto

$$(\bar{B}_r(a))^c = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| > r\}$$

es abierto pues es el complemento de un cerrado

Nota
Sea X un conjunto no vacío (puede no ser un espacio vectorial) y $d: X \times X \to \mathbb{R}$ tal que
1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$;
2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$
3) $x = y$ si y solo si $d(x,y) = 0$
4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

decimos que d define una métrica para X, al número $d(x,y)$ le llamamos la distancia entre x e y, y a (X,d) le llamamos un espacio métrico

Ejemplos
1) Tomemos X cualquier conjunto no vacío.
La función

$$d: X \times X \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

define una métrica sobre X. A (X,d) le llamamos espacio métrico discreto y d es la métrica discreta

2) X es un espacio vectorial normado.
La función

$$d: X \times X \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto d(x,y) = \|x-y\|$$

define una métrica sobre X. Así (X,d) es un espacio métrico

Definición
Sea (X,d) un espacio métrico. Sean $a \in X$ y $r>0$ cualesquiera. Tenemos los conjuntos:
1. Bola abierta de centro a y radio r

$$B_r(a) = \{x \in X : d(a,x) < r\}$$

2. Bola cerrada de centro a y radio r

$$\bar{B}_r(a) = \{x \in X : d(a,x) \leq r\}$$

3. Esfera de centro a y radio r

$$S_r(a) = \{x \in X : d(x,a) = r\}$$

Sea $U \subseteq X$ no vacío. Decimos que $a \in U$ es un punto interior de U cuando existe $r>0$ tal que

$$B_r(a) \subseteq U$$

Así, U es abierto cuando todos sus puntos son interiores

Lema: Dados cualesquier $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, se tiene que si $A \subseteq B$, entonces

$$\overline{A} \subseteq \overline{B}$$

Demostración

Cuando $A = \emptyset$, se tiene que, se tiene que

$$\overline{A} = \emptyset \subseteq \overline{B}$$

Supongamos que $\overline{A} \neq \emptyset$.

Sea $x \in \overline{A}$ cualquiera.

Así, existe $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión, tal que

$$x_k \in A \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

y

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x$$

Como $x_k \in A \subseteq B$ $\forall k \in \mathbb{N}$, vemos que

1) $x_k \in B \qquad \forall k \in \mathbb{N}$

2) $\lim_{k\to\infty} x_k = x$

Así, como x es arbitrario, con $x \in \overline{B}$, se sigue que

$$\overline{A} \subseteq \overline{B}$$

$\square$

Definición

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_*$$

si y solo si

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_k, x_*) < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0.$$

Viernes 13, diciembre de 2019.

Teorema:

Dado cualquier $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se tiene que $\overline{A}$ es cerrado, i.e.,

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$$

Demostración

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ cualquiera.

P.D. $\overline{A}$ es cerrado

Idea 1. Todos los puntos de de adherencia de $\overline{A}$ pertenecen a $\overline{A}$

↓

propiedades específicas del conjunto

Idea 2: $\overline{A}^c$ es abierto

↳ no se tienen muchos recursos

Vamos a demostrar que $\overline{A}^c$ es abierto.

Notemos que cuando $\overline{A}^c = \emptyset$, se tiene que $\overline{A} = \mathbb{R}^n$, el cual es cerrado.

Supongamos que $\overline{A}^c \neq \emptyset$. Sea $x \in \overline{A}^c$, cualquiera

P.D. $\exists r>0$ tal que $B_r(x) \subseteq \overline{A}^c$

Como $x \notin \overline{A}$, existe $U \in \mathcal{N}_x$ tal que

$$U \cap A = \emptyset \qquad (1)$$

Como U es abierto y $x \in U$, existe $r>0$ tal que

$$B_r(x) \subseteq U \qquad (2)$$

Por (1) y (2), obtenemos que

$$B_r(x) \cap A = \emptyset$$

así

$$B_r(x) \subseteq A^c$$

$$\Rightarrow (A^c)^c \subseteq B_r(x)^c$$

$$\Rightarrow A \subseteq B_r(x)^c$$

$$\Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B_r(x)^c}$$

donde $B_r(x)^c$ es cerrado pues su complemento, $B_r(x)$, es abierto. Por tanto,

$$\overline{A} \subseteq B_r(x)^c$$

$$\Rightarrow B_r(x) = B_r(x)^{cc} = \overline{A}^c$$

Esto muestra que $x \in \overline{A}^c$ es un punto interior de $\overline{A}^c$. Como x es arbitrario, todos los puntos de $\overline{A}^c$ son puntos interiores. Así, $\overline{A}^c$ es abierto y por tanto $\overline{A}$ es abierto $\square$

Teorema

i) Si $\{A_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ es una familia de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\bigcap_{\theta\in\Theta} A_\theta$$

es cerrado.

ii) Si $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrados, entonces

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A_1 \cup \cdots \cup A_m$$

es cerrado.

Demostración.

Sean $A_1, \ldots, A_m$ conjuntos cerrados. Vamos a probar que

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i$$

es cerrado. Para la demostración consideremos el resultado obtenido para los conjuntos abiertos, así notemos que $A_1^c, A_2^c, \ldots, A_m^c$ son conjuntos abiertos. ~~Entonces~~ Escribimos

$$\bigcap_{i=1}^{m} A_i^c = S \qquad (1)$$

con S un conjunto abierto. Así, tomando el complemento

Materia: Análisis Real
Tema: Densidad
Hoja: 18 de

se tiene que

$$\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{m} A_i^{c^c}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{m} A_i$$

luego, como S es abierto, entonces S^c es cerrado y por (1), se tiene que

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = S^c$$

Es decir, la unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

ii) Sea $\{A_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ una familia de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$, vamos a probar que

$$\bigcap_{\theta\in\Theta} A_\theta$$

es cerrado. Para ello, notemos que $\{A_\theta^c\}_{\theta\in\Theta}$ es una familia de conjuntos abiertos. Por otra parte, escribimos

$$\bigcup_{\theta\in\Theta} A_\theta^c = S \qquad (2)$$

con S un conjunto abierto. Tomando el complemento, se tiene que

$$\left(\bigcup_{\theta\in\Theta} A_\theta^c\right)^c = \bigcap_{\theta\in\Theta} A_\theta^{c^c}$$

$$= \bigcap_{\theta\in\Theta} A_\theta$$

de donde como S es abierto, entonces S^c es cerrado y, por (2), se tiene que

$$\bigcap_{\theta\in\Theta} A_\theta = S^c.$$

Es decir, la intersección arbitraria de cerrados es un conjunto cerrado.

Proposición

Consideremos $A\subseteq\mathbb{R}^n$ y

$$\mathcal{F} := \{A\subseteq B : B \text{ es cerrado}\}$$

Se tiene que

$$\overline{A} = \bigcap_{B\in\mathcal{F}} B$$

Decimos que $\overline{A}$ es el cerrado más pequeño que contiene a A

Demostración

Notemos que $\mathcal{F}\neq\emptyset$ pues $\mathbb{R}^n$ y $\overline{A}$ son cerrados que contienen a A

P.D. (1) $\overline{A}\subseteq\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B$

(2) $\bigcap_{B\in\mathcal{F}} B \subseteq \overline{A}$.

Como

$$\bigcap_{B\in\mathcal{F}} B \subseteq B \qquad \forall B\in\mathcal{F}$$

En particular, $\overline{A}\in\mathcal{F}$, así

$$\bigcap_{B\in\mathcal{F}} B\subseteq\overline{A}$$

lo que muestra (2).

Además

$$A\subseteq B, \quad B \text{ es cerrado}$$

para cada $B\in\mathcal{F}$, por tanto

$$A\subseteq\bigcap_{B\in\mathcal{F}} B$$

$$\Rightarrow \overline{A}\subseteq\overline{\bigcap_{B\in\mathcal{F}} B} = \bigcap_{B\in\mathcal{F}} B,$$

pues $\bigcap_{B\in\mathcal{F}} B$ es cerrado por ser la intersección arbitraria de cerrados. Así (1) se cumple $\square$

Definición

Decimos que $A\subseteq\mathbb{R}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$ cuando $\overline{A}=\mathbb{R}^n$

Vemos que $\mathbb{R}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$ pues

$$\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$$

En cambio, $\emptyset$ no es denso en $\mathbb{R}^n$, pues

$$\emptyset = \overline{\emptyset} = \mathbb{R}^n$$

Vemos que $\overline{A}\subseteq\mathbb{R}^n$, para cualquier $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Así, para demostrar que A es denso en $\mathbb{R}^n$, basta con probar que $\mathbb{R}^n\subseteq\overline{A}$

$$\mathbb{R}^n = \overline{A}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{R}^n\subseteq\overline{A}$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^n,\ x\in\overline{A}$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq A \text{ convergente a } x$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^n,\ U\cap A\neq\emptyset \quad \forall U\in N_x$$

Lema.

Para cualquier $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$, se tiene que $(a,b)\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$.

Demostración

Sea $a,b\in\mathbb{R}$, cualesquiera.

Por la propiedad arquimediana entre $b-a>0$ y 1, sabemos que existe $k\in\mathbb{N}$ tal que

$$k(b-a)>1$$

Por tanto,

$$0 < \frac{1}{k} < b-a,$$

y así

$$a < a + \frac{1}{k} < b \qquad (1)$$

Consideremos el conjunto

$$T := \{ j \in \mathbb{Z} : \frac{j}{k} > a \}$$
$$= \{ j \in \mathbb{Z} : j > ka \}$$

el cual es no vacío, pues,

$$[ak] + 1 \in T$$

Vemos que ak es una cota inferior de T, por tanto T es acotado inferiormente. Así podemos considerar

$$m = \inf T = \min T,$$

por tanto

$$m \in T \quad y \quad m > ak \qquad (2)$$

Además, notemos que $m-1 \notin T$, lo que significa que

$$m-1 \leq ak \iff \frac{m-1}{k} \leq a \qquad (3)$$

Usando (2), (3) y (1), obtenemos que

$$a < \frac{m}{k} = \frac{m-1}{k} + \frac{1}{k} \leq a + \frac{1}{k} < b$$

lo que muestra que

$$\frac{m}{k} \in (a,b)$$

y como $\frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$, así

$$(a,b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

Esto para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. $\square$

Teorema

$\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, i.e, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Demostración

Sabemos que $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{R}$ (Recuerde que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ $\Rightarrow \overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{R}$)

basta probar con demostrar que

$$\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$$

Sea $x \in \mathbb{R}$, cualquiera

P.D. $x \in \overline{\mathbb{Q}}$

P.D. $U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, $\forall U \in \mathcal{N}_x$

$\iff B_r(x) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, $\forall r > 0$

$\iff (x-r, x+r) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, $\forall r > 0$

Sea $r > 0$, cualquiera. Por el lema anterior, sabemos que

$$(x-r, x+r) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

(tomando $a = x-r < b = x+r$)

Así,

$$B_r(x) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

como r es arbitrario,

$$B_r(x) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \quad \forall r > 0$$

así $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. Como $x \in \mathbb{R}$ es arbitrario hemos probado que $\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, y por tanto $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Corolario

Se tiene que $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$, i.e, $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$

Demostración

Sabemos que $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{R}$, de donde, se tiene que

$$\overline{\mathbb{Q}^n} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Así, basta probar que

$$\mathbb{R}^n \subseteq \overline{\mathbb{Q}^n}$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$, cualquiera.

P.D. $x \in \overline{\mathbb{Q}^n}$

Notemos que $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ y, además como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, entonces existe $(x_k^i)_{k \in \mathbb{N}}$ con $i = 1, \dots, n$, tal que

$$\lim_{k \to \infty} x_k^i = x^i$$

luego, por las sucesiones componentes

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \left(\lim_{k \to \infty} x_k^1, \dots, \lim_{k \to \infty} x_k^n \right) = (x^1, \dots, x^n) = x$$

donde $x_k := (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Pero como

$$x_k^i \in \mathbb{Q} \qquad k \in \mathbb{N}, \; i = 1, \dots, n$$

entonces

$$x_k \in \mathbb{Q}^n \qquad k \in \mathbb{N}$$

es decir

$$(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^n$$

y además

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x.$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Así, como x es arbitrario, entonces

$$\mathbb{R}^n \subseteq \overline{\mathbb{Q}^n}$$

y por tanto, como

$$\overline{\mathbb{Q}^n} \subseteq \mathbb{R}^n$$

entonces

$$\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$$

es decir, $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$.

Materia: Análisis Real
Tema: Distancia entre conjuntos
Hoja 19 de

Distancia entre conjuntos

Dados $A \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y $a \in \mathbb{R}^n$, al número

$$\operatorname{dist}(a, A) := \inf\{\|x-a\| : x \in A\} = \inf_{x\in A} \|a-x\| =: \operatorname{dist}(A, a)$$

le llamamos la distancia entre a y A.

Notemos que $\operatorname{dist}(A, a)$ está bien definido pues

$$\{\|x-a\| : x \in A\}$$

está acotado inferiormente, pues 0 es una cota inferior.

En particular, cuando $a \in A$, vemos que

$$0 = \|a-a\| \leq \|x-a\| \qquad \forall x \in A$$

así $\operatorname{dist}(a, A) = 0$.

Así

$$\operatorname{dist}(a, \mathbb{R}^n) = 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}^n$$

Ejemplo

Vamos a calcular la distancia más corta del punto $(1,-1,-1)$ al plano de ecuación

$$x + 4y + 3z = 2$$

Tomemos

$$a = (1,-1,-1)$$

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 4y + 3z = 2\}$$

Calcular $\operatorname{dist}(a, A)$.

Consideremos

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto F(x,y,z) = \|(x,y,z) - a\| = \|(x,y,z) - (1,-1,-1)\| = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2$$

Usando multiplicadores de Lagrange al problema

$$\min f(x,y,z) \quad \text{sujeto a las condiciones} \quad x + 4y + 3z - 2 = 0$$

encontramos que la solución es el punto

$$\frac{1}{13}(17, 3, -1)$$

Así,

$$\operatorname{dist}(a, A) = \inf_{x\in A} \|a - x\|$$
$$= \left\|(1,-1,-1) - \frac{1}{13}(17,3,-1)\right\|$$
$$= \frac{\sqrt{416}}{13}$$

Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacíos, definimos la distancia entre A y B como el número

$$\operatorname{dist}(A,B) = \inf\{\|a - b\| : a \in A \text{ y } b \in B\} = \inf_{\substack{a\in A\\ b \in B}} \|a-b\| = \operatorname{dist}(B, A)$$

Proposición

Para cualquier $A \subseteq \mathbb{R}^n$, no vacío, $\operatorname{dist}(A, \overline{A}) = 0$

Lema.

Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío. y $a \in \mathbb{R}^n$ (no necesariamente en A). Se tiene que $a \in \overline{A}$ si y solo si $\operatorname{dist}(A, a) = 0$.

Demostración

$\Rightarrow)$ Supongamos que $a \in \overline{A}$. Así

$$B_{1/k}(a) \cap A \neq \emptyset \qquad k \in \mathbb{N}.$$

De este modo, existen, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in A$ tal que

$$\|x_k - a\| < \frac{1}{k}.$$

Así,

$$0 \leq \operatorname{dist}(a, A) \leq \|x_k - a\| \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad \leftarrow \text{caracterización del ínfimo}$$
$$< \frac{1}{k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Del teorema del sánduche se sigue que

$$0 = \lim_{k\to\infty} d(a, A) = d(a, A)$$

$\Leftarrow)$ Supongamos que $\operatorname{dist}(A, a) = 0$

P.D. $a \in \overline{A}$

Sea $r > 0$ cualquiera. Por la caracterización del ínfimo existe

$$w_r \in \{\|x - a\| : x \in A\}$$

tal que

$$w_r < \operatorname{dist}(a, A) + r,$$

por tanto, existe $x_r \in A$ tal que

$$\|a - x_r\| < \overset{0}{\operatorname{dist}(a, A)} + r = r,$$

con $w_r = \|a - x_r\|$. Así

$$x_r \in B_r(a) \cap A,$$

es decir

$$B_r(a) \cap A \neq \emptyset$$

Como $r > 0$ es arbitrario, se tiene que

$$B_r(a) \cap A \neq \emptyset, \qquad \forall r > 0$$

en consecuencia $a \in \overline{A}$.

Demostración (Proposición)

$$0 \leq \text{Dist}(A,B) = \inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}} \|a-b\|$$
$$\leq \|a-b\| \qquad \forall a\in A,\ \forall b\in B.$$

Cuando $A\subseteq B$, en particular

$$0\leq \text{dist}(A,B)$$
$$\leq \|a-b\| \qquad \forall a\in A\ \forall b\in B$$

En particular

$$0\leq \text{dist}(A,B)$$
$$\leq \|a-b\| \qquad \forall a,b\in A,\ a=b$$

Así,

$$0\leq \text{Dist}(A,B)$$
$$\leq \|a-a\|$$
$$=0$$

es decir

$$\text{Dist}(A,B)=0$$

Sean $A,B\subseteq \mathbb{R}^n$ no vacíos. Sabemos que

$$0\leq \text{Dist}(A,B)\leq \|a-b\| \qquad \forall a\in A,\ \forall b\in B$$

Sea $b\in B$, cualquiera. Así,

$$\text{dist}(A,B)\leq \|a-b\| \qquad \forall a\in A$$

Vemos que $\text{Dist}(A,B)$ es una cota inferior para el conjunto

$$\{\|a-b\| : a\in A\}$$

$$\text{Dist}(A,B) \leq \inf_{a\in A} \|b-a\|$$
$$= \text{dist}(A,b)$$

Como b es arbitrario,

$$\text{dist}(A,B)\leq \text{dist}(A,b)$$

para cada $b\in B$.

Puntos de acumulación
(Puntos límite)

Decimos que $a\in\mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de $A\subseteq\mathbb{R}^n$, no vacío. Cuando

$$(U\setminus\{a\})\cap A\neq\emptyset \qquad \forall U\in N_a$$

Denotamos por A' al conjunto de puntos de acumulación de A, y lo llamamos derivado.

Ejemplo

Sea $a\in\mathbb{R}^n$ arbitrario pero fijo

$A:=\{a\}$ es cerrado, así a es el único punto de adherencia de A. Así

$$U\cap A\neq\emptyset \qquad \forall U\in N_a$$

por tanto

$$(U\setminus\{a\})\cap A=\emptyset \qquad \forall U\in N_a,$$

lo que muestra que a no es un punto de acumulación de A

Moraleja

No siempre los puntos de adherencia de un conjunto son puntos de acumulación.

Nota.

Sea $A\subseteq\mathbb{R}^n$ no vacío.

¿Son todos los puntos de acumulación de A, puntos de adherencia?, es decir, $A'\subseteq\overline{A}$

En caso de que $A'=\emptyset$, $A'\subseteq\overline{A}$, trivialmente.

Supongamos que $A'\neq\emptyset$.

Sea $a\in A'$, cualquiera.

Se tiene que

$$(U\setminus\{a\})\cap A\neq\emptyset \qquad \forall U\in N_a$$

así

$$U\cap A\supseteq(U\setminus\{a\})\cap A\neq 0 \qquad \forall U\in N_a$$

$\Rightarrow a\in\overline{A}$

Como a es arbitrario, se tiene que

$$A'\subseteq\overline{A}.$$

Teorema.

Sean $a\in\mathbb{R}^n$ y $A\subseteq\mathbb{R}^n$ no vacío. Los siguientes enunciados son equivalentes

i) $a\in A'$

ii) Existe una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq A\setminus\{a\}$ tal que
$$\lim_{k\to\infty} x_k = a$$

iii) Cualquier bola abierta con centro en a contiene infinitos puntos de A.

Materia: Análisis Real
Tema: Distancia entre conjuntos
Hoja: 20 de

Viernes, 20 de diciembre de 2019.

Demostración

$i) \Rightarrow ii)$

Supongamos que $a \in A'$, por tanto

$$(\mathcal{U} \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset \quad \forall \mathcal{U} \in \mathcal{N}_a$$

En particular,

$$(B_r(a) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset \quad \forall r > 0$$

Así,

$$(B_{1/k}(a) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Por tanto, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe

$$x_k \neq a, \quad \|x_k - a\| < \frac{1}{k}, \quad x_k \in A$$

Vemos que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{a\}$ es convergente a a

$ii) \Rightarrow iii)$

Supongamos que existe $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{a\}$ convergente a a.

P.D. Cualquier bola abierta de centro en a posee infinitos puntos

Sea $r > 0$, cualquiera.

P.D. $B_r(a) \cap A$ tiene infinitos puntos

Como $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente a a, sabemos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$x_k \in B_r(a) \quad \forall k \geq k_0 \qquad (1)$$

Además, como

$$x_k \in A \setminus \{a\} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

junto con (1), se tiene que

$$x_k \in B_r \cap A \setminus \{a\} \quad \forall k \geq k_0 \qquad (2)$$

Notemos que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente a a de modo que todos sus términos son distintos de a. Así $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \neq (a)_{k\in\mathbb{N}}$, ni ninguna de sus p-colas, con $p \in \mathbb{N}$ cualquiera.

Por tanto, cada uno de los términos x_k son distintos entre sí, i.e.,

$$x_k \neq x_j \quad \forall k, j \in \mathbb{N}, \quad k \neq j$$

De este modo tenemos que, junto con 2,

$$A \cap B_r(a) \quad \text{posee infinitos puntos}$$

↳ numerable

como $A \cap B_r(a) \subseteq B_r(a)$. $B_r(a)$ tiene infinitos puntos de A. Como r es arbitrario, cualquier bola abierta de centro en a posee infinitos puntos de A

$iii) \Rightarrow i)$

Supongamos que cualquier bola abierta de centro en a, contiene infinitos puntos de A $\forall r > 0$

P.D. $a \in A'$

P.D. $(\mathcal{U} \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset \quad \forall \mathcal{U} \in \mathcal{N}_a$

Sea $\mathcal{U} \in \mathcal{N}_a$, cualquiera.

Sabemos que $\mathcal{U}$ es abierto y $a \in \mathcal{U}$, por tanto existe $r > 0$, tal que

$$B_r(a) \subseteq \mathcal{U} \qquad (1)$$

Por otra parte, ya que cualquier bola abierta de centro en a contiene infinitos puntos de A, entonces

$$B_r(a) \cap A \neq \emptyset \text{ y posee infinitos puntos} \qquad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que

$$\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$$

y posee infinitos puntos en esta intersección

$$(\mathcal{U} \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Luego, como $\mathcal{U}$ es arbitrario, entonces

$$(\mathcal{U} \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset \quad \forall \mathcal{U} \in \mathcal{N}_a$$

por tanto $a \in A'$. □

Ejemplos

1) Sea $a \in \mathbb{R}^n$ arbitrario pero fijo. $A = \{a\}$

Como no existen sucesiones no constantes en A convergentes a a, A no tiene puntos de acumulación. Así, $A' = \emptyset$

2) $A \subseteq \mathbb{R}^n$, finito. $A' = \emptyset$.

3) Sea $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ acotada y no constante, existen $\alpha := \lim_{k\to\infty} \sup x_k$ y $\beta := \lim_{k\to\infty} \inf x_k$

Notemos que $Rg(x) = \{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ posee puntos de acumulación α y β pues

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} x_{\varphi(k)}, \quad \varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ estrictamente creciente}$$

$$x_{\varphi(k)} \in Rg(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Es decir

$$\lim_{k\to\infty} \sup x_k, \ \lim_{k\to\infty} \inf x_k \in Rg(x)'.$$

4) $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$

Notemos que $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$, así nos basta checar que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{Q}'$.

Sea $x \in \mathbb{R}$, cualquiera.

Como $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ entonces

$$B_r(x) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \quad \forall r > 0$$

Como $B_r(x)$ tiene infinitos puntos y $\mathbb{Q}$ tiene infinitos puntos, así,

$$B_r(x) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \text{ y posee infinitos puntos}$$

Así

$$(B_r(x)\setminus\{x\})\cap\mathbb{Q}\neq\varnothing$$

lo que significa que $x\in\mathbb{Q}'$.

Como x es arbitrario, se sigue que

$$\mathbb{R}\subseteq\mathbb{Q}',$$

por lo cual

$$\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$$

$\square$

Proposición

Dado cualquier $A\subseteq\mathbb{R}^n$ no vacío, se tiene que

$$\overline{A}=A\cup A'$$

Nota: Cuando $A=\varnothing$, $\overline{A}=\varnothing$. Si $\varnothing=\overline{A}=A\cup A'\Rightarrow A'$

Demostración

Sabemos que

$$A\subseteq\overline{A}$$
$$A'\subseteq\overline{A}$$

así

$$A\cup A'\subseteq\overline{A} \qquad (1)$$

Probemos que

$$\overline{A}\subseteq A\cup A' \qquad \leftarrow \text{Ejercicio}$$

Corolario

$A\subseteq\mathbb{R}^n$ es cerrado si y solo si $A'\subseteq A$.

Lunes 2 de Enero de 2020.

Conjuntos compactos

Sean $A\subseteq\mathbb{R}^n$ y

$$\mathcal{U}:=\{U_\theta\subseteq\mathbb{R}:\theta\in\Theta\}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Decimos que $\mathcal{U}$ es un recubrimiento de A ($\mathcal{U}$ recubre A) cuando

$$A\subseteq\bigcup_{\theta\in\Theta}U_\theta=\bigcup_{U\in\mathcal{U}}U$$

cuando no se especifica los índices

Cuando cada elemento de $\mathcal{U}$, recubriendo A, es abierto, decimos que $\mathcal{U}$ es un recubrimiento abierto de A.

Si existe $\tilde{\Theta}\subseteq\Theta$ tal que

$$A\subseteq\bigcup_{\theta\in\tilde{\Theta}}U_\theta$$

decimos que $\{U_\theta:\theta\in\tilde{\Theta}\}\subseteq\mathcal{U}$ es un subrecubrimiento de A

subrecubrimiento = subfamilia

Cuando $\tilde{\Theta}$ es finito, usamos la denominación de subrecubrimiento finito.

Definición

Decimos que $A\subseteq\mathbb{R}^n$ es compacto, cuando cualquier recubrimiento abierto de A admite o posee un subrecubrimiento finito.

Ejemplo 1.

Sea $\mathcal{U}:=\{U_\theta\subseteq\mathbb{R}^n:\theta\in\Theta\}$ una familia de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Puesto que

$$\varnothing\subseteq\bigcup_{\theta\in\Theta}U_\theta,$$

$\mathcal{U}$ es un recubrimiento abierto abierto de $\varnothing$.

Además, como

$$\varnothing\subseteq U_\theta \qquad \forall\theta\in\Theta$$

cada $\{U_\theta\}$ es un subrecubrimiento finito de $\varnothing$. $(\Theta:=\{\theta\})$.

Así, cada recubrimiento abierto del vacío admite un subrecubrimiento finito, i.e., $\varnothing$ es compacto.

Ejemplo 2.

Consideremos

$$A:=\{a_1,\dots,a_m\}\subseteq\mathbb{R}^n$$

Para cualesquier $r_1,r_2,\dots,r_m>0$, sabemos que

$$a_i\in B_{r_i}(a_i) \qquad \forall i=1,\dots,m.$$

Por tanto

$$A\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}B_{r_i}(a_i)$$

De este modo,

$$\{B_{r_i}(a_i):i=1,\dots,m\}$$

es un recubrimiento abierto de A

No es un recubrimiento arbitrario

Así mismo

$$A=\bigcup_{i=1}^{m}\overline{B}_{r_i}(a_i)$$

por tanto $\{\overline{B}_{r_i}(a_i):i=1,\dots,m\}$

es un recubrimiento de A que no es abierto.

P.D. Cualquier recubrimiento abierto de A admite un subrecubrimiento finito.

Sea $\mathcal{U}:=\{U_\theta\subseteq\mathbb{R}^n:\theta\in\Theta\}$ ← no sabemos quien es

un recubrimiento abierto de A, cualquiera.

Así

$$A=\{a_1,\dots,a_m\}\subseteq\bigcup_{\theta\in\Theta}U_\theta$$

Materia: Análisis Real
Tema: Conjuntos Compactos
Hoja 21 de

Así, para cada $a_i \in A$, existe $\theta_i \in \Theta$ tal que

$$a_i \in U_{\theta_i}, \quad i=1,\dots,m$$

Así,

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{\theta_i}$$

lo que muestra que

$$\{U_{\theta_i} : i=1,\dots,m\} \subseteq \mathcal{U}$$

es un subrecubrimiento finito de A.

Como $\mathcal{U}$ es arbitrario, hemos probado que cualquier recubrimiento abierto de A, admite un subrecubrimiento finito, i.e., A es compacto.

Observación

$\varnothing$	compacto	cerrado	acotado
conjuntos finitos	compactos	cerrado	acotado

Ejemplo

Consideremos

$$H := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$
$$= [0, +\infty) = ((-\infty, 0))^c$$

Vemos que H es cerrado pues su complemento $(-\infty, 0)$, es abierto.

H no es acotado. Vamos a demostrar que H no es compacto. Debemos hallar un recubrimiento abierto de H que no admita un subrecubrimiento finito.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos

$$G_k = (-1, k)$$

el cual es abierto. Por la propiedad arquimediana para cada $x > 0$, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < x < k$$

(Propiedad arquimediana entre 1 y x)

Notemos también que $0 \in G_1$. Así,

$$H \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k$$

lo que muestra que

$$\mathcal{U} := \{G_k : k \in \mathbb{N}\}$$

es un recubrimiento abierto de H.

Probemos que $\mathcal{U}$ no admite un subrecubrimiento finito.

Supongamos que $\mathcal{U}$ si admite un subrecubrimiento finito de H. Así, existe $\{k_1, \dots, k_m\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que

$$H \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} G_{k_i}$$
$$= \bigcup_{i=1}^{m} (-1, k_i). \quad (1)$$

Tomemos $M = \max\{k_1, \dots, k_m\}$

$$= \max_{i=1,\dots,m} k_i \in \mathbb{N}$$

el cual es un número natural, por tanto $M > 0$, así $M \in H$. Además

$$\bigcup_{i=1}^{m} (-1, k_i) = (-1, M) \quad (2)$$

combinando (1) y (2), obtenemos que

$$H \subseteq (-1, M)$$

Además $M+1 \in H$ así $M+1 \in (-1, M)$ y por tanto

$$M+1 < M$$
$$\Rightarrow 1 < 0$$

lo cual no es cierto pues es una contradicción. Así, $\mathcal{U}$ no admite un subrecubrimiento finito.

En conclusión H no es compacto.

Ejemplo

Consideremos $L := (0, 1)$

No es difícil ver que

$$\mathcal{U} = \left\{ \left(\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}\right) : k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \right\}$$

es un recubrimiento abierto de L

¿Admite $\mathcal{U}$ un subrecubrimiento finito?

Supongamos que $\mathcal{U}$ si admite un subrecubrimiento finito de L. Así, existe $\{k_1, \dots, k_m\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tal que

$$L \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{k_i}, 1 + \frac{1}{k_i}\right)$$

Tomemos $M = \min\{k_1, \dots, k_m\}$

$$= \min_{i=1,\dots,m} k_i$$

donde

$$M > 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{M} < 1$$

Así, se tiene que $\frac{1}{M} \in (0, 1)$. Sin embargo

$$\frac{1}{M} \notin \left(\frac{1}{M}, 1 + \frac{1}{M}\right)$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{M} \notin L$$

lo que contradice el hecho inicial de que $\frac{1}{M} \in L$.

Así, $\mathcal{U}$ no admite un subrecubrimiento finito.

En conclusión L no es compacto.

Lema. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, compacto. Se tiene que A es cerrado y acotado.

Demostración

P.D. A es cerrado.

Ideas

A^c es abierto *

$\overline{A} \subseteq A$ | Cuando sé quien es A

$A' \subseteq A$ | explícitamente.

Puesto que $A \neq \mathbb{R}^n$, se tiene que $A^c \neq \emptyset$.
En efecto probemos, que si A es compacto, no puede ser $\mathbb{R}^n$.

P.D. $A \neq \mathbb{R}^n$

Por contradicción, supongamos que $A = \mathbb{R}^n$, con A compacto.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto abierto

$$U_k := B_k(0)$$

Probemos que

$$\mathcal{U} := \{U_k : k \in \mathbb{N}\}$$

es un recubrimiento de $\mathbb{R}^n$.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$, cualquiera.

Cuando $x = 0$, vemos que $x \in U_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$.
En cambio, cuando $x \neq 0$, $\|x\| > 0$. Por la propiedad Arquimediana entre $\|x\|$ y 1, sabemos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|x - 0\| = \|x\| < k_0 \cdot 1 = k_0$$

Por tanto, $x \in B_{k_0}(0) = U_{k_0}$ y, así

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$$

Como x es arbitrario,

$$\mathbb{R}^n \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k \qquad (1)$$

Como cada U_k es abierto, se sigue que $\mathcal{U}$ es un recubrimiento abierto de $\mathbb{R}^n$. Ahora, como $\mathbb{R}^n$ es compacto, $\mathcal{U}$ admite un sobrecubrimiento
Así, existen $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ tales que

$$\mathbb{R}^n \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{k_i} = \bigcup_{i=1}^{m} B_{k_i}(0)$$

Tomando $k = \max_{i=1,\ldots,m} k_i \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$\mathbb{R}^n \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_{k_i}(0) = B_k(0)$$

Ahora, como

$$x = (k+1, 0, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{R}^n$$

es tal que

$$\|x\| = \sqrt{(k+1)^2} = |k+1| = k+1$$

lo cual contradice (1). En conclusión, $\mathbb{R}^n$ no es compacto.

Como A es compacto, sabemos que $A \neq \mathbb{R}^n$ y por tanto $A^c \neq \emptyset$.

P.D. A^c es abierto

Sea $x \in A^c$, cualquiera.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos $U_k := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| > \frac{1}{k}\}$

Notemos que cada U_k es abierto, pues su complemento, es cerrado.

Además, se tiene que

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k = \mathbb{R}^n \setminus \{x\},$$

y como $x \notin A$, se tiene que

$$A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k,$$

así, $\mathcal{U} := \{U_k : k \in \mathbb{N}\}$

es un recubrimiento abierto de A.

Como A es compacto, $\mathcal{U}$ posee un subrecubrimiento finito de A; i.e., existen $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{k_i}.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $k_1 < k_2 < \cdots < k_m$.

No es difícil ver que

$$U_k \subseteq U_{k+1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

(Usar inducción sobre k)

Así,

$$\bigcup_{i=1}^{m} U_{k_i} = U_{k_m},$$

y por tanto

$$A \subseteq U_{k_m} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| > \tfrac{1}{k_m}\}$$

De este modo

$$\left(\overline{B}_{\frac{1}{k_m}}(x)\right)^{c\,c} \subseteq A^c$$

$$\Rightarrow B_{\frac{1}{k_m}}(x) \subseteq \left(B_{\frac{1}{k_m}}(x)\right)^{c\,c} \subseteq A^c,$$

Así, $x \in A^c$ es un punto interior de A^c.
Como x es arbitrario, todos los puntos de A^c son interiores, es decir, A^c es abierto. En consecuencia A es cerrado.

P.D. A es acotado

Recordemos que

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k(0) = \mathbb{R}^n \supseteq A$$

Así,

$$\mathcal{U} = \{B_k(0) : k \in \mathbb{N}\}$$

Materia: Análisis Real
Tema: Compactos
Hoja: 22 de

es un recubrimiento abierto de A.

Como A es compacto, $\mathcal{U}$ admite un subrecubrimiento finito, es decir, existen $k_1, k_2, \dots, k_m$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_{k_i}(0) = B_{k_m}(0) \subseteq \overline{B}_{k_m}(0),$$

lo que muestra que A es compacto. $\square$

Ejercicio.
Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, acotado inferiormente. Si A es cerrado, entonces, $\inf A \in A$.

Teorema (Intervalos encajados. Cantor)
Cada sucesión de intervalos encajados $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$.

- $I_k \subseteq \mathbb{R}^n$ intervalo cerrado, $\forall k\in\mathbb{N}$
- $I_{k+1} \subseteq I_k$, $\forall k\in\mathbb{N}$.

es tal que.

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k \neq \varnothing$$

Demostración
Estudiemos el caso $n=1$. Puesto que $I_1 \neq \varnothing$, podemos tomar $x_1 \in I_1$. Ahora, como $I_2 \subseteq I_1$ y $I_2 \neq \varnothing$ podemos tomar $x_2 \in I_2$ tal que $x_2 \leq x_1$. Así mismo, como $I_3 \subseteq I_2 \subseteq I_1$ y $I_3 \neq \varnothing$, tomamos $x_3 \in I_3$ tal que

$$x_3 \leq x_2 \leq x_1$$

En general, como $I_{k+1} \subseteq I_k$ y $I_k \neq \varnothing$, para cada $k\in\mathbb{N}$, podemos construir una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números reales tales que

$$x_k \in I_k \qquad y \quad x_{k+1} \leq x_k$$

para cada $k\in\mathbb{N}$. Notemos además que

$$I_k \subseteq I_1 \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

por tanto

$$x_k \in I_1 \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

Así, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq I_1$ es cerrado y acotado. Por tanto

$$\{x_k : k\in\mathbb{N}\} \subseteq I_1$$

es acotado, y por tanto $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada. Además, como $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es decreciente, entonces $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente, por tanto, existe $x^* \in \mathbb{R}$, tal que

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_*.$$

Se sigue que

$$x_* \in \overline{I_1} = I_1,$$

pues I_1 es cerrado. Ahora, notemos que

$$I_k \subseteq I_2 \qquad \forall k\in\mathbb{N}\setminus\{1\},$$

así

$$(x_k)_{k=2}^{\infty} \subseteq I_2$$

convergente a x_*
(Pues $(x_k)_{k=2}^{\infty}$ es una subsucesión de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, convergente a x_*). Así

$$x_* \in \overline{I_2} = I_2$$

Usando esta idea, vemos que

$$(x_k)_{k=j}^{\infty} \subseteq I_j$$

es una sucesión convergente a x_*, para cada $j\in\mathbb{N}$. Así

$$x_* \in \overline{I_j} = I_j, \qquad \forall j\in\mathbb{N},$$

pues cada I_j es cerrado. En consecuencia

$$x_* \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} I_j,$$

es decir

$$\bigcap_{j\in\mathbb{N}} I_j \neq \varnothing$$

Ahora, supongamos que $n>1$.
Escribimos

$$I_k = [a_k^1, b_k^1] \times [a_k^2, b_k^2] \times \dots \times [a_k^n, b_k^n])$$

para cada $k\in\mathbb{N}$. Sabemos que

$$([a_k^1, b_k^1])_{k\in\mathbb{N}},\ ([a_k^2, b_k^2])_{k\in\mathbb{N}}, \dots, ([a_k^n, b_k^n])_{k\in\mathbb{N}}$$

son sucesiones de intervalos encajados en $\mathbb{R}^n$.
Por el caso $n=1$, sabemos que

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} [a_k^j, b_k^j] \neq \varnothing \quad \text{para cada } j=1,\dots,n$$

De este modo, tomemos

$$x^j \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [a_k^j, b_k^j]$$

con $j=1,\dots,n$. Definimos

$$\begin{aligned} x &= (x^1, x^2, \dots, x^n) \\ &\in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [a_k^1, b_k^1] \times \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [a_k^2, b_k^2] \times \dots \times \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [a_k^n, b_k^n] \\ &\subseteq [a_k^1, b_k^1] \times [a_k^2, b_k^2] \times \dots \times [a_k^n, b_k^n] \\ &= I_k \qquad \forall k\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Así

$$x \in I_k, \qquad \forall k\in\mathbb{N},$$

por tanto

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k \neq \emptyset$$

$\square$

Ejemplos

1) $I_k := \prod_{k=1}^{n} \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right] = \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right] \times \cdots \times \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]$

$$\subseteq \mathbb{R}^n$$

es un intervalo cerrado para cada $k\in\mathbb{N}$. No es difícil ver que

$$I_{k+1} \subseteq I_k \qquad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Así $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de intervalos encajados en $\mathbb{R}^n$. Por el teorema de Cantor $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k \neq \emptyset$.

~~Así,~~

~~$k\in\mathbb{N}$~~

2) $J_k := \left(0, \frac{1}{k}\right)$, $k\in\mathbb{N}$. Vemos que

$$J_{k+1} \subseteq J_k \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

Así $\left(\frac{1}{k}\right)_{k=2}^{\infty} \subseteq J_1$

convergente a $0 \notin J$.

En general

$$\left(\frac{1}{k}\right)_{k=j}^{\infty} \subseteq J_j$$

converge a $0 \in J_j$, para cada $j\in\mathbb{N}$

Notemos que

$$\bigcap_{j\in\mathbb{N}} J_j = \emptyset$$

Teorema de Heine - Borel

Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

Demostración

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Sabemos que si A es compacto entonces es cerrado y acotado. Supongamos que A es cerrado y acotado.

P.D. A es compacto

En caso de que $A \neq \emptyset$, sabemos que A es compacto.

Supongamos que $A \neq \emptyset$

Sea $\mathcal{U} = \{U_\theta \subset \mathbb{R}^n : \theta \in \Theta\}$ un recubrimiento abierto de A, cualquiera

P.D. $\mathcal{U}$ admite un subrecubrimiento finito.

Supongamos que, $\mathcal{U}$ no admite un subrecubrimiento finito.

Como A es acotado, existe un cubo

$$I_1 := \prod_{k=1}^{n} [-M, M]$$

tal que

$$A \subseteq I_1,$$

donde $M>0$. La longitud de los lados de I_1 es $2M$. Bisecamos I_1, obteniendo 2^n cubos cuyos lados tienen longitud M. Llamamos I_2 al cubo (alguno de los 2^n cubos que se obtuvieron al bisectar I_2) para el cual

$$I_2 \subseteq I_1, \quad I_2 \cap A \neq \emptyset$$

no vacía no pueda recubrirse con una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$.

Bisecamos I_2, obteniendo 2^n cubos, cuyos lados tienen longitud $M/2$. Llamamos I_3 al cubo para el cual

$$I_3 \subseteq I_2 \qquad I_3 \cap A \neq \emptyset$$

no puede recubrirse con una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$

Usando esta idea podemos construir una sucesión $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de intervalos cerrados tal que

i) $$I_{k+1} \subseteq I_k \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

ii) $$I_k \cap A \neq \emptyset$$

no puede cubrirse por una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$

iii) La longitud de cada uno de los lados es $M/2^{k-2}$ $\forall k\in\mathbb{N}$

De i, vemos que $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de intervalos encajados, así por el teorema de Cantor

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k \neq \emptyset,$$

es decir, existe $z \in I_k$ $\forall k\in\mathbb{N}$.

Sabemos que (ver iii y el ejemplo)

$$\delta(I_k) = \sqrt{n}\,\frac{M}{2^{k-1}}$$

para $k\in\mathbb{N}$. Por tanto

$$\lim_{k\to\infty} \delta(I_k) = 0 \qquad (1)$$

Sea $r>0$, cualquiera. Existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\delta(I_k) = |\delta(I_k) - 0| < r \qquad \forall k \geq k_0$$

en particular

$$\sup_{x,y\in I_{k_0}} \|x-y\| = \delta(I_{k_0}) < r$$

y por tanto

$$\|x-y\| < r \qquad \forall x,y \in I_{k_0}.$$

Además, como $z \in I_{k_0}$, tenemos que

$$\|x-z\| < r \qquad \forall x \in I_{k_0},$$

Materia: Análisis Real
Tema: Compactos y Continuidad
Hoja: 23 de

lo que indica que
$$I_{k_0} \subseteq B_r(z).$$
En resumen, para cada $r>0$ existe $k_r \in \mathbb{N}$ tal que
$$I_{k_r} \subseteq B_r(z) \qquad (2)$$
Recordemos que
$$\emptyset \neq I_{k_r} \cap A \subseteq B_r(z) \cap A \qquad \forall r>0,$$
por tanto
$$B_r(z) \cap A \neq \emptyset \qquad \forall r>0,$$
así $z \in \overline{A} = A$, pues A es cerrado.
Recordemos que $\mathcal{U}$ es un recubrimiento abierto de A, así
$$A \subseteq \bigcup_{\theta \in \Theta} U_\theta$$
y como $z \in A$, existe $\theta_* \in \Theta$ tal que
$$z \in U_{\theta^*}$$
Como U_{θ^*} es abierto, existe $r_* > 0$ tal que
$$B_{r_*}(z) \subseteq U_{\theta^*}.$$
Además, por (2), existe $k_{r_*} \in \mathbb{N}$ tal que
$$I_{k_{r_*}} \subseteq B_{r_*}(z) \subseteq U_{\theta^*}$$
Así
$$I_{k_{r_*}} \cap A \subseteq U_{\theta_*} \cap A \subseteq U_{\theta_*}$$
es decir, $I_{k_{r_*}} \cap A$ se recubre por $\{U_{\theta_*}\} \subseteq \mathcal{U}$, lo cual contradice (ii).
Esto nos indica que no es cierto que $\mathcal{U}$ no admita subrecubrimientos finitos.
Como $\mathcal{U}$ es arbitrario, hemos probado que A es compacto. $\square$

Proposición Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ compactos. Se tiene que
1) $A \cap B$ es compacto;
2) $A \cup B$ es compacto;
3) Si $T \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n$ son tales que S es compacto y T es cerrado, entonces T es compacto.

Demostración.
i) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ compactos, cualesquiera. Notemos que, por el teorema de Heine-Borel A y B son cerrados y acotados. Además, se tiene que, en particular,
$$A \cap B \subseteq A$$
de donde, como A es acotado, entonces $A \cap B$ también es acotado. Por otra parte, como A y B son cerrados, entonces
$$A \cap B$$
es un conjunto cerrado. De donde, como
$$A \cap B$$
es cerrado y acotado, entonces por el teorema de Heine-Borel, $A \cap B$ es compacto, para $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ compactos cualesquiera. $\square$

ii) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ compactos, cualesquiera. Notemos que, por el teorema de Heine-Borel A y B son cerrados y acotados. Así, como la unión finita de cerrados es cerrada, entonces
$$A \cup B$$
es cerrado. Por otra parte, notemos que, como A y B son acotados, entonces existe $M_A > 0$ y $M_B > 0$ tales que
$$|a| \leq M_A \ \forall a \in A \quad y \quad |b| \leq M_B \ \forall b \in B. \ (1)$$
Recordemos que si $A \cup B$ es vacío, entonces, es compacto. Supongamos que $A \cup B$ es no vacío. Así, tomemos $x \in A \cup B$, cualquiera. Notemos que
$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \ \vee \ x \in B$$
de donde si $x \in A$, entonces por (1) existe $M_A > 0$, tal que
$$|x| \leq M_A,$$
análogamente, si $x \in B$, entonces existe $M_B > 0$ tal que
$$|x| \leq M_B$$
Así, como x es arbitrario, entonces hemos probado que $A \cup B$ es acotado. De donde como $A \cup B$ es cerrado y acotado, entonces es compacto. $\square$

(iii) Sean $T \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n$ son tales que S es compacto y T es cerrado. Notemos que, como S es compacto y por el teorema de Heine-Borel, S es cerrado y acotado, de donde, como
$$T \subseteq S$$
entonces T es acotado. Además, como T es cerrado, entonces T es compacto. $\square$

Sin Heine-Borel
i) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, compactos. Notemos que si
$$A \cap B = \emptyset$$
entonces, $A \cap B$ es compacto. Así, sea $A \cap B \neq \emptyset$, y definamos
$$\mathcal{U}_A = \{U_\theta^A : \theta \in \Theta_A\} \quad y \quad \mathcal{U}_B = \{U_\theta^B : \theta \in \Theta_B\}$$
recubrimientos abiertos de A y B respectivamente.

y sea

$$\mathcal{U} = \{U_\theta : \theta \in \Theta\}$$

un recubrimiento abierto de $A\cap B$. Notemos que

$$A\cap B \subseteq \bigcup_{\theta\in\Theta} U_\theta$$

$$(A\cap B)\cup B^c \subseteq \Big(\bigcup_{\theta\in\Theta} U_\theta\Big)\cup B^c$$

$$\Rightarrow \quad A\cup B^c \subseteq \bigcup_{\theta\in\Theta}(U_\theta\cup B^c)$$

luego, como $A\subseteq A\cup B^c$, entonces

$$A\subseteq \bigcup_{\theta\in\Theta}(U_\theta\cup B^c)$$

Funciones Continuas.

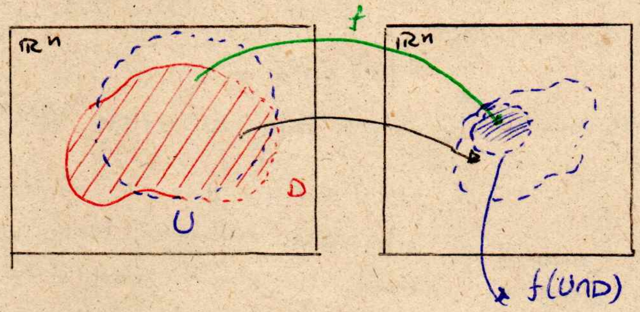
Sea $D\subseteq\mathbb{R}^n$ no vacío. Consideremos la función

$$f: D\subseteq\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

que puede ser evaluada en cada punto de D. Llamamos D al dominio de f.

Decimos que f es continua en $a\in D$ cuando para cada $V\in\mathcal{N}_{f(a)}$ existe $U\in\mathcal{N}_a$ tal que

$$\forall x\in U\cap D \Rightarrow f(x)\in V.$$



Cuando f es continua ($f: D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$) es continua en cada punto de D, decimos que f es continua sobre D o f es continua globalmente, sobre su dominio.

Teorema.
Sea $f: D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una función y $a\in D$. Los siguientes enunciados son equivalentes

a) f es continua en a;

(b) Para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$, tal que
$\forall x\in D \quad \|x-a\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\|<\varepsilon$

(c) Para toda sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq D$ convergente a a se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$$

En este caso, escribimos

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Demostración

$a \Rightarrow b$

Supongamos que f es continua en a. Sea $\varepsilon>0$, cualquiera. Como f es continua en a y $B_\varepsilon(f(a))\in\mathcal{N}_{f(a)}$, existe $\mathcal{U}\in\mathcal{N}_a$ tal que

$$\forall x\in D\cap \mathcal{U} \Rightarrow f(x)\in B_\varepsilon(f(a)) \quad (1)$$

Como U es abierto y $a\in U$, existe $r>0$, tal que

$$B_r(a)\subseteq U$$

y así

$$B_r(a)\cap D\subseteq U\cap D$$

particularizando en (1), obtenemos

$$\forall x\in B_r(a)\cap D \Rightarrow f(x)\in B_\varepsilon(f(a))$$

$\Leftrightarrow \forall x\in D, \|x-a\|<r \Rightarrow \|f(x)-f(a)\|<\varepsilon$ (2)

Tomando $\delta := r>0$, y como ε es arbitrario (b) es cierto.

---

b) $\Rightarrow$ c)

Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq D$ una sucesión convergente a a, cualquiera.

Notemos que al menos siempre existe una sucesión de puntos en D convergente a a, la constante $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$

P.D.

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$$

Sea $\varepsilon>0$, cualquiera. Recordemos que $a := \lim_{k\to\infty} x_k$, i.e., para cada $\varepsilon_1>0$ existe $k_0\in\mathbb{N}$, tal que

$$\|x_k-a\|<\varepsilon_1.$$

En particular, para $\delta>0$ existe un $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\|x_k-a\|<\delta \qquad \forall k\geq k_0 \quad (3)$$

Usando (2) y (3) obtenemos

$\forall x_k\in D,\ k\geq k_0,\ \|x_k-a\|<\delta \Rightarrow \|f(x_k)-f(a)\|<\varepsilon$

así

$$\|f(x_k)-f(a)\|<\varepsilon \qquad \forall k\geq k_0$$

lo que muestra que

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$$

pues ε es arbitrario.

---

c) $\Rightarrow$ a)

En realidad vamos a probar que si (a) no es cierto, entonces (c) no es cierto.

Como f no es continua en a, es decir, existe $V\in\mathcal{N}_{f(a)}$ para todo $U\in\mathcal{N}_a$ tal que

$$(\neg(\exists x\in U\cap D,\ f(x)\in V)) \quad (\forall x\in U\cap D \wedge f(x)\notin U)$$

Materia Análisis Real
Tema Continuidad
Hoja 24 **de**

$\exists x_* \in U \cap D$ y $f(x_*) \in V$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos

$$U_k := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < \frac{1}{k}\} = B_{1/k}(a)$$

Notemos que $U_k \subseteq \mathcal{N}_a$, para cada $k \in \mathbb{N}$.
Por hipótesis, existe

$$x_k \in U_k \cap D \quad \text{tal que} \quad f(x_k) \notin V$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Así

$$x_k \in D, \ \|x_k - a\| < \frac{1}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Luego, como

$$0 < \|x_k - a\| < \frac{1}{k}$$

y además

$$\lim_{k\to\infty} 0 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0,$$

por el teorema del sánduche

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - a\| = 0$$

de donde,

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a.$$

En resumen, hemos construido una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq D$ convergente a a, y tal que

$$f(x_k) \notin V \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Como $V \in \mathcal{N}_{f(a)}$, existe $r > 0$ tal que

$$B_r(f(a)) \subseteq V$$

Por tanto

$(f(x_k) \in B_r(f(a)) \quad \forall k \in \mathbb{N})$

$\Leftrightarrow (\|f(x) - f(a)\| \geq r \quad \forall k \in \mathbb{N})$

y en consecuencia $f(a)$ no es el límite de $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$

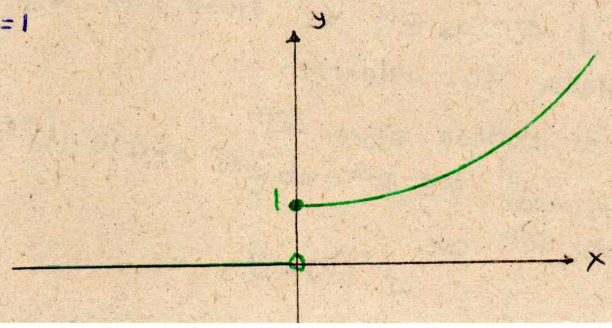
Miércoles, 22 de Enero de 2020.

Ejemplos

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$f(0) = 1$



Intuición: f no es continua

Vamos a encontrar una sucesión de números reales convergente a 0, cuyas imágenes no convergen a $f(0) = 1$.

Por ejemplo

$$\lim_{k\to\infty} -\frac{1}{k} = 0 \quad \text{y} \quad \text{además}$$

$$\lim_{k\to\infty} f(-\frac{1}{k}) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0 \neq f(0) = 1$$

Como $(-\frac{1}{k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es convergente a 0, pero $(f(-\frac{1}{k}))_{k\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(0)$. Esto muestra que f no es continua en 0.

2) Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua en $\mathbb{R}^n$, arbitraria pero fijo. Consideremos $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto g(x) = \|f(x)\|_{\mathbb{R}^m}$$

Probemos que g es continua en $\mathbb{R}^n$. Tomemos $a \in \mathbb{R}^n$, cualquiera.

P.D. g es continua en a.

Sea $\varepsilon > 0$, cualquiera.

$$|g(x) - g(a)| = |\,\|f(x)\| - \|f(a)\|\,| \leq \|f(x) - f(a)\| \qquad (1)$$

desigualdad triangular

para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Como f es continua, en particular f es continua en a. Así, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \qquad (2)$$

con

Por tanto, de (1) y (2) obtenemos que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \|x - a\| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

Como ε es arbitrario, se sigue que g es continua en a. Como a es arbitraria, g es continua sobre $\mathbb{R}^n$.

3) La función

$$i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto i(x) = x \qquad \text{identidad}$$

es continua sobre $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio

Por el ejemplo anterior

$$\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \|x\| = \|i(x)\|$$

es continua sobre $\mathbb{R}^n$. Por tanto, para cualquier $a \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ convergente a a, se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \left\| \lim_{k\to\infty} x_k \right\| = \|a\|$$

4) $D := (0, +\infty)$

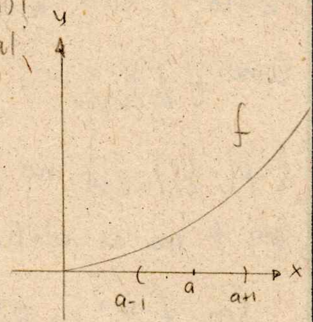
$f: D \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = x^2$

Vamos a probar que f es continua sobre D.

Sea $a \in D$, cualquiera. Vemos que

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |(x-a)(x+a)| = |x+a||x-a|$$

para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.



Supongamos

$$|x-a| < 1$$
$$\Leftrightarrow \quad a-1 < x < a+1$$
$$\Leftrightarrow \quad 2a-1 < x < 2a+1.$$

Como $a \in D$, $-2a < 2a$, tenemos que $-2a-1 = -(2a+1) < 2a-1$. Así,

$\forall x \in D$, $|x-a| < 1 \Rightarrow -(2a+1) < x+a < 2a+1$

es decir

$$\forall x \in D, \ |x-a| < 1 \Rightarrow |x+a| < 2a+1 \qquad (1)$$

Recordemos que

$$|f(x) - f(a)| = |x+a||x-a| < (2a+1)|x-a|$$

para cada $x \in D \cap B_1(a)$.

Sea $\varepsilon > 0$, cualquiera.

Para que

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{necesitamos}$$

que

$$|x-a| < \frac{\varepsilon}{2a+1}$$

¿Para qué $x \in D$?

$$|x-a| < \frac{\varepsilon}{2a+1}$$
$$\Leftrightarrow a - \frac{\varepsilon}{2a+1} < x < a + \frac{\varepsilon}{2a+1}$$
$$x \in B_{\frac{\varepsilon}{2a+1}}(a)$$

En resumen, para cada $x \in B_1(a) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2a+1}}(a) \cap D$

$$|f(x) - f(a)| < (2a+1)|x-a| < \cancel{(2a+1)} \frac{\varepsilon}{\cancel{2a+1}} = \varepsilon$$

tomando $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{2a+1}\} > 0$, se tiene lo siguiente

$\forall x \in D \cap B_\delta(a)$

$\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$,

es decir.

$\forall x \in D$, $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Como ε es arbitrario, entonces hemos probado que f es continua en a y como a es arbitrario, f es continua sobre su D.

5. $D = (0, 4)$

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = x^2$

es continua sobre D.

Sea $a \in D$, cualquiera. Veamos que

$$|f(x) - f(a)| = |x-a||x+a| \leq (|x| + |a|)|x-a| \leq (4+4)|x-a| = 8|x-a|$$

para cada $x \in D$.

Sea $\varepsilon > 0$, cualquiera. Tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{8} > 0$;

vemos que

$\forall x \in D$, $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Teorema: - Continuidad Global -

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
Los siguientes enunciados son equivalentes

(a) f es continua en D.

(b) Para cualquier ($V \subseteq \mathbb{R}^m$) $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto existe $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto tal que

$$f^{-1}(V) = \{x \in D : f(x) \in V\} = U \cap D.$$

(a $f^{-1}(V)$ le llamamos la imágen inversa de V a través de f.)

(f no tiene por que poseer inversa)

(c) Para cualquier $S \subseteq \mathbb{R}^m$ cerrado, existe $T \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado tal que

$$f^{-1}(S) = \{x \in D : f(x) \in S\} = T \cap D.$$

Corolario

Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se tiene los siguientes resultados equivalentes:

a) f es continua sobre $\mathbb{R}^n$.

b) Para cada $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto existe $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, tal que

$$f^{-1}(V) = \mathcal{U}.$$

Materia Análisis Real
Tema Continuidad
Hoja 25 de

3. Para cada $S \subseteq \mathbb{R}^m$ cerrado, existe $T \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado, tal que
$$f^{-1}(S) = T.$$

Demostración

(a) ⇒ (b)

Supongamos que f es continua sobre D.
Sea $V \subseteq \mathbb{R}^m$, abierto cualquiera
Si $f^{-1}(V) = \varnothing$, basta tomar $U = \varnothing$,
$$f^{-1}(V) = U \cap D$$
Supongamos que $f^{-1}(V) \neq \varnothing$. Sea $a \in f^{-1}(V)$, cualquiera. Así $f(a) \in V$, y como V es abierto, y f es continua a, existe $U_a \in N_a$
$$\forall x \in U_a \cap D \Rightarrow f(x) \in V$$
Consideremos el conjunto
$$U : \bigcup_{a \in f^{-1}(V)} U_a \subseteq \mathbb{R}^n$$
el cual es abierto por ser la unión arbitraria de abiertos. No es difícil ver que
$$f^{-1}(U) = U \cap D$$ ← imagen inversa, terminar los detalles.

(b) ⇒ (a)

P.D. f es continua en D

Sea $a \in D$, cualquiera
Sea $V \in N_{f(a)}$, cualquiera.
Como V es abierto, por hipótesis existe $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto tal que
$$f^{-1}(V) = U \cap D$$
Como $f(a) \in V$, se tiene que
$$a \in f^{-1}(V) = \{x \in D : f(x) \in V\}$$
$$= U \cap D$$
así $a \in U$. Por tanto $U \in \mathcal{N}_a$. Además
$$\forall x \in D \cap U = f^{-1}(V) \Rightarrow f(x) \in V.$$
Como V es arbitrario, f es continua en a.
Como a es arbitrario, se sigue que f es continua sobre D.

b) ⇒ c)

Supongamos que para todo $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto, existe $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto tal que $f^{-1}(V) = U \cap D$

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^m$ cerrado, cualquiera.
P.D. Existe $T \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado, tal que
$$f^{-1}(S) = T \cap D$$
Como S es cerrado, sabemos S^c es abierto en $\mathbb{R}^m$. Así, por hipótesis sabemos que existe $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto tal que
$$f^{-1}(S^c) = U \cap D$$
Notemos que
$$f^{-1}(S) \cap f^{-1}(S^c) = \varnothing.$$
por tanto
$$f^{-1}(S) \cup f^{-1}(S^c) = D$$ ← terminar detalles

De esto
$$f^{-1}(S) = D \cap (f^{-1}(S^c))^c$$
$$= D \cap (U \cap D)^c$$
$$= D \cap (U^c \cup D^c)$$
$$= D \cap U^c \cup D \cap D^c$$
$$= D \cap U^c$$
con $T = U^c = \mathbb{R}^n$ cerrado
$$\Rightarrow D \cap U^c = T \cap D.$$
Como S es arbitrario, se sigue (c).

(c) ⇒ (b)

Sea $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto, cualquiera

P.D. Existe $U \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto tal que
$$f^{-1}(V) = U \cap D$$
Como V es abierto, sabemos que V^c es cerrado en $\mathbb{R}^m$. Así, por hipótesis sabemos que existe $T \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado, tal que
$$f^{-1}(V^c) = T \cap D.$$
Notemos que
$$f^{-1}(V^c) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$$
por tanto
$$f^{-1}(V^c) \cup f^{-1}(V) = D$$
De esto
$$f^{-1}(V) = D \cap (f^{-1}(V^c))^c$$
$$= D \cap (T \cap D)^c$$
$$= D \cap (T^c \cup D^c)$$
$$= (D \cap T^c) \cup (D \cap D^c)$$
$$= D \cap T^c$$
$$= D \cap U$$
con $U = T^c \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Como V es arbitrario, se sigue (b)

Ejemplos.

1) Sean $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$ arbitrarios pero fijos

$$C := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : ax^1 + bx^2 + cx^3 = \alpha\}$$
$$= \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : f(x^1, x^2, x^3) \in \{\alpha\}\}$$

con

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x^1, x^2, x^3) \mapsto f(x^1, x^2, x^3) = ax^1 + bx^2 + cx^3$$

$f^{-1}(\{\alpha\})$

Como f es continua sobre $\mathbb{R}^n$ y $\{\alpha\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado, se sigue que C es cerrado.

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

con

$$f_i : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad \text{con } i = 1, \dots, n$$

A f_i le llamamos la i-ésima función componente de f.

Sea $a \in D$, f es continua en a si y solo si f_i es continua en a, para cada $i = 1, \dots, n$.

2) Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, arbitrarios pero fijos. Consideremos

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto f(t) = x + t(y - x)$$

es continua sobre $\mathbb{R}$.

Sea $a \in \mathbb{R}$, cualquiera. Vamos a probar que f es continua en a. Notemos que $x, y \in \mathbb{R}^n$, tales que

$$x := (x^1, \dots, x^n) \quad y \quad y = (y^1, \dots, y^n)$$

de donde, se tiene que.

$$f(t) = (x^1, \dots, x^n) + t(y^1 - x^1, \dots, y^n - y^1)$$

y además sea

$$(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$$

con

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x^*,$$

notemos que

$$\lim_{k \to \infty} (x_k^*(y - x)) = x^*(y - x).$$

Por otra parte,

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = \lim_{k \to \infty} \left(x + x_k(y - x)\right)$$
$$= x + x^*(y - x)$$
$$= f(x^*)$$

Ahora, sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y no vacío

$$A' = \{t \in \mathbb{R} : x + t(x - y) \in A\}$$
$$= f^{-1}(A)$$

Como A es abierto y f es continua sobre $\mathbb{R}$, $f^{-1}(A) = A'$ es abierto.

P.D. A' es abierto

Sea $t \in A'$, cualquiera. Como $t \in A'$

$$x + t(x - y) \in A$$

Como A es abierto, existe $r > 0$ tal que

$$B_r(x + t(y - x)) \subseteq A$$

$$\Rightarrow \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z - x - t(y - x)\| < r\}$$

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$$

f es continua en $\mathbb{R}$

$\forall V \subseteq \mathbb{R}$ abierto, $f^{-1}(V)$ es abierto
(cerrado)

¿Qué pasa con las imágenes directas de abiertos y cerrados por f?

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ abierto (cerrado)

$$f(\mathbb{R}) = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$$
$$= (0, 1]$$

el cual no es abierto ni cerrado

Teorema.

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y $f: K \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Si f es continua sobre K entonces $f(K)$ es compacto

Demostración

P(D). $f(K)$ es compacto.

Sea $\mathcal{U} = \{U_\theta : \theta \in \Theta\}$ un recubrimiento abierto de $f(K)$, cualquiera.

~~Como cada~~

Sea $\theta \in \Theta$ cualquiera. Como $U_\theta \subseteq \mathbb{R}^m$ es abierto y f es continua globalmente sobre K, existe $W_\theta \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, tal que

$$f^{-1}(U_\theta) = W_\theta \cap K$$

Así,

$$(1) \quad K \subseteq \bigcup_{\theta \in \Theta} W_\theta$$

En efecto si $K = \emptyset$, entonces (1) es cierto. Supongamos $K \neq \emptyset$. Sea $x \in K$, cualquiera

Vemos que

$$f(x) \in f(K) \subseteq \bigcup_{\theta \in \Theta} U_\theta,$$

Materia Análisis Real
Tema Continuidad
Hoja 26 **de**

así $f(x) \in U_{\theta_*}$, para algún $\theta_* \in \Theta$. Por tanto

$$x \in f^{-1}(U_{\theta_*}) = W_{\theta_*} \cap K,$$

y de este modo

$$x \in W_{\theta_*} \subseteq \bigcup_{\theta \in \Theta} U_\theta$$

Como x es arbitrario, hemos probado (1). Como $W_\theta \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto y

$$K \subseteq \bigcup_{\theta \in \Theta} U_\theta,$$

se sigue que $\{W_\theta : \theta \in \Theta\}$ es un recubrimiento abierto de K. Como K es compacto, existen $\theta_1, \dots, \theta_k \in \Theta$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} W_{\theta_i}$$

Por tanto

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (W_{\theta_i} \cap K) = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(U_{\theta_i}) \qquad (2)$$

En consecuencia

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{\theta_i} \qquad (3)$$

En efecto, si $f(K) = \emptyset$ se tiene (2). Supongamos $f(K) \neq \emptyset$. Sea $y \in f(K)$ cualquiera. Así existe $a \in K$ tal que $y = f(a)$. Como (3) se cumple, existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que

$$a \in f^{-1}(U_{\theta_i})$$

y por tanto

$$y = f(a) \in U_{\theta_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{\theta_i}$$

Como y es arbitrario, se sigue (3). Así, (3) nos demuestra que $\mathcal{U}$ admite un subrecubrimiento finito para $f(K)$. Como $\mathcal{U}$ es arbitrario, hemos probado que $f(K)$ es compacto.

Teorema - Valor máximo y mínimo -
Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y $f : K \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua sobre K. Existen $x_*, x^* \in K$ tales que

$$f(x_*) = \min\{f(x) : x \in K\}$$

$$f(x^*) = \max\{f(x) : x \in K\}$$

Demostración
Como K es compacto y f es continua sobre K, sabemos que $f(K)$ es compacto y por tanto es un subconjunto de $\mathbb{R}$ cerrado y acotado. Como $f(K)$ es acotado, $f(K)$ posee un ínfimo α y un supremo (β). Además como $f(K)$ es cerrado, sabemos que $\alpha, \beta \in f(K)$. Como $\alpha, \beta \in f(K)$, existen $x^*, x_* \in K$ tales que

$$\alpha = f(x_*) = \min\{f(x) : x \in K\} = \min_{x \in K} f(x) = \min f(K)$$

$$\beta = f(x^*) = \max\{f(x) : x \in K\} = \max f(K)$$

Conexidad

Decimos que $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es disconexo cuando existen dos subconjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos y no vacíos tales que

$$A \cap S \neq \emptyset \qquad B \cap S \neq \emptyset$$

$$(A \cap S) \cup (B \cap S) = S$$

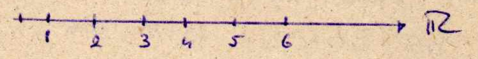
$$(A \cap S) \cap (B \cap S) = \emptyset$$

Decimos que A y B son una disconexión de S
(Un conjunto disconexo es aquel que admite una disconexión)

Decimos que un conjunto es conexo cuando no es disconexo

Ejemplos

1) $S = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$



Consideremos $A = (1/2, 3/2)$ abierto
$B = (3/2, +\infty)$ abierto

$$\{1\} = A \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$$

$$\mathbb{N} \setminus \{1\} = B \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$$

$$(A \cap \mathbb{N}) \cap (B \cap \mathbb{N}) = \emptyset$$

$$(A \cap \mathbb{N}) \cup (B \cap \mathbb{N}) = \mathbb{N}$$

A y B son disconexiones de $\mathbb{N}$. Así $\mathbb{N}$ es disconexo.

2) $S = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} A = (-\infty, e) \\ B = (e, +\infty) \end{array}\right\} \text{abiertos no vacíos}$$

$$A \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \qquad B \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

$$(A \cap \mathbb{Q}) \cap (B \cap \mathbb{Q}) = \emptyset$$

$$(A \cap \mathbb{Q}) \cup (B \cap \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$

$\mathbb{Q}$ es disconexo

3) Sea $a \in \mathbb{R}^n$, arbitrario pero fijo. $S=\{a\}$

P.D. S es conexo.

Supongamos que S no es conexo así S es disconexo. Por tanto existen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos no vacíos tales que

$$\{a\} = A\cap S \neq \emptyset = S \qquad B\cap S = \emptyset = S$$

$$(A\cap S)\cap(B\cap S) = \emptyset = S$$
$$(A\cap S)\cup(B\cap S) = S$$

Así

$$S=\{a\}\neq\emptyset$$
y
$$S=\emptyset$$

lo cual es una contradicción, así S no es disconexo, por tanto S es conexo.

4) $[0,1]$ es conexo

Supongamos que $[0,1]$ es disconexo

Así existe $A,B\subseteq\mathbb{R}$ abiertos no vacíos tales que

$$A\cap[0,1]\neq 0 \qquad B\cap[0,1]\neq\emptyset$$

$$(A\cap[0,1])\cap(B\cap[0,1]) = \emptyset$$

$$(A\cup B)\cap[0,1] = (A\cap[0,1])\cup(B\cap[0,1]) = [0,1]$$

Como A y B son abiertos no vacíos cada uno posee infinitos puntos; y así

$$A\cap[0,1] \text{ y } B\cap[0,1]$$

también poseen infinitos puntos. Así, existen $a\in(A\cap[0,1])$ y $b\in(B\cap(0,1])$ tales que $a\neq b$, $0<a$, $b\leq 1$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $a<b$.

Consideremos el conjunto

$X(x) = \{x\in A : x<b\} = A\cap(-\infty,b)$

el cual es no vacío pues $a\in X$ el cual es no vacío pues $a\in X$, es abierto por ser la intersección de abiertos, y acotado superiormente pues b es una cota superior de X

Así existe

$$\alpha := \sup X,$$

así $\alpha \geq a \geq 0$. También vemos que α

$$\alpha = b < 1$$

por tanto

$\alpha\in(0,1)\subseteq[0,1] = (A\cup B)\cap[0,1]$.

Así $\alpha\in A$ o ~~$\alpha\in B$~~

$$\alpha\in A\cap[0,1) \quad \text{o} \quad \alpha\in B\cap[0,1]$$

$(\alpha<b)$

Supongamos $\alpha\in A\cap[0,1]$. Así $\alpha\notin b$. Además,

~~Así~~ como A es abierto, $\alpha\in A$, existe $r>0$ tal que

$$B_r(\alpha) = (\alpha-r,\alpha+r)\subseteq A.$$

Sabemos existe $\alpha_1\in B_r(\alpha)$ tal que

$$\alpha<\alpha_1<b = \alpha<\alpha_1<b$$

$(\alpha<\alpha_1<b)$ (Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$)

Caso $\alpha\in A$

$\alpha_1\in B_r(\alpha)\subseteq A$, $\quad \alpha\leq\alpha_1<b$

$\Rightarrow \alpha_1\in A \quad \wedge \quad \alpha_1<b$

$\Rightarrow \alpha_1\in X$

Así, $\alpha_1\in X$ y $\alpha_1>\alpha=\sup X$, lo cual no es posible. Esto demuestra que α no puede ser elemento de A.

Caso $\alpha\in B$

Por tanto $\alpha\in B$. Como B es abierto, existe $r>0$ tal que

$$B_r(\alpha) = (\alpha-r,\alpha+r)\subseteq B$$

Como $\alpha=\sup X$, existe $\alpha_2\in X$ tal que

$$\alpha-r<\alpha_2\leq\alpha$$

Por tanto $[\alpha_2,\alpha)\subseteq X\subseteq A$ y también

$$[\alpha,\alpha_2)\subseteq B_r(x)\subseteq B,$$

así

$$[\alpha_2,\alpha)\cap[0,1] = [\alpha_2,\alpha)\neq\emptyset$$

y

$$[\alpha_2,\alpha)\cap[0,1]\subseteq(A\cap[0,1])\cap(B\cap[0,1])$$

lo cual no es posible pues todos los subconjuntos de un conjunto vacío son vacíos.

Así, $\alpha\in[0,1]$, tal que

$$\alpha\notin(A\cap[0,1])$$
ni
$$\alpha\notin(B\cap[0,1])$$

es decir

$$\alpha\notin((A\cap[0,1])\cup(B\cap[0,1])) = [0,1],$$

lo cual no es posible.

Así, $[0,1]$ no es disconexo, y por tanto $[0,1]$ es conexo

Demostración para intervalos abiertos

Materia Análisis Real
Tema Conexidad
Hoja 27 de

Teorema $\mathbb{R}^n$ es conexo

Demostración

Supongamos que $\mathbb{R}^n$ no es conexo, es decir, $\mathbb{R}^n$ es disconexo.

Así, existen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos y no vacíos tales que

$$A \cap \mathbb{R}^n = A \neq \emptyset$$

$$B \cap \mathbb{R}^n = B \neq \emptyset$$

$$(A \cap \mathbb{R}^n) \cap (B \cap \mathbb{R}^n) = A \cap B = \emptyset$$

$$(A \cap \mathbb{R}^n) \cup (B \cap \mathbb{R}^n) = A \cup B = \mathbb{R}^n$$

Sea $x \in A$ y $y \in B$, $x \neq y$, arbitrarios pero fijos. Consideremos

$$R := \{ x + t(y-x) : t \in [0,1] \}$$

el cual se interpreta como la recta que une x con y. Consideremos

$$A_* = \{ t \in \mathbb{R} : x + t(y-x) \in A \} \subseteq \mathbb{R}$$

$$B_* = \{ t \in \mathbb{R} : x + t(y-x) \in B \} \subseteq \mathbb{R}$$

los cuáles son no vacíos pues

$$0 \in A_* \quad \text{y} \quad 1 \in B_*.$$

Además, la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto f(t) = x + t(y-x)$$

es continua sobre $\mathbb{R}$, del Teorema de continuidad global

$$f^{-1}(A) = \{ t \in \mathbb{R} : f(t) \in A \} = A_*$$

y

$$f^{-1}(B) = \{ t \in \mathbb{R} : f(t) \in B \} = B_*$$

son abiertos. Notemos que

$$A_* \cap B_* = \emptyset$$

¿Son A_* y B_* una disconexión de $[0,1]$?

$$(A \cap [0,1]) \cap (B \cap [0,1]) = \emptyset$$

$$\boxed{(A \cap [0,1]) \cup (B \cap [0,1]) = [0,1]}$$

Sí, A_* y B_* son una disconexión para $[0,1]$ lo cual no es posible pues $[0,1]$ es conexo. Así, $\mathbb{R}^n$ no es disconexo, por tanto $\mathbb{R}^n$ es conexo.

Corolario

Los únicos subconjuntos abiertos y cerrados de $\mathbb{R}^n$, son $\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$

Demostración

Supongamos que existe $A \subsetneq \mathbb{R}^n$ no vacío que es abierto y cerrado.

Así, $A^c \neq \emptyset$, pues $A \subseteq \mathbb{R}^n$, y es abierto y cerrado. Por tanto A y A^c abiertos no vacíos tales que

$$(A \cap \mathbb{R}^n) \cap (A^c \cap \mathbb{R}^n) = A \cap A^c = \emptyset$$

$$(A \cap \mathbb{R}^n) \cup (A^c \cap \mathbb{R}^n) = A \cup A^c = \mathbb{R}^n$$

lo que muestra que A y A^c forman una disconexión de $\mathbb{R}^n$, lo cual contradice el hecho de que $\mathbb{R}^n$ es conexo.

Por tanto, no existe A, así $\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$ son los únicos abiertos y cerrados al mismo tiempo $\square$

Teorema

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Si D es conexo y f es continua sobre D, entonces $f(D) \subseteq \mathbb{R}^m$ es conexo

Demostración

Supongamos que $f(D)$ no es conexo, es decir, $f(D)$ es disconexo. Así, existen $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos y no vacíos tales que

$$(A \cap f(D)) \cap (B \cap f(D)) = \emptyset \quad (1)$$

$$(A \cap f(D)) \cup (B \cap f(D)) = f(D) \quad (2)$$

Como A y B son abiertos y f es continua sobre todo sobre D, existen $U_A, U_B \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos tales que

$$f^{-1}(A) = U_A \cap D$$

y

$$f^{-1}(B) = U_B \cap D$$

¿Son U_A y U_B una disconexión para D?

1. $(U_A \cap D) \cap (U_B \cap D)$

Si $x \in (U_A \cap D) \cap (U_B \cap D) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ entonces

$$f(x) \in A \cap B \cap f(D) \overset{(1)}{=} \emptyset$$

Así

$$(U_A \cap D) \cap (U_B \cap D) = \emptyset$$

2. $(U_A \cap D) \cup (U_B \cap D) = D$

No es difícil ver que

$$(U_A \cap D) \cup (U_B \cap D) \subseteq D \cup D = D$$

Probemos que

$$D \subseteq (U_A \cap D) \cup (U_B \cap D)$$

Sea $x \in D$, cualquiera. Como $f(x) \in f(D)$. Por (2),

$$f(x) \in f(D) \cap A$$

ó

$$f(x) \in f(D) \cap B$$

Así

$$x \in f^{-1}(A) = U_A \cap D$$

y

$$x \in f^{-1}(B) = U_B \cap D$$

Por tanto

$$x \in ((U_A \cap D) \cup (U_B \cap D))$$

Como x es arbitrario, (3) es cierto. En resumen, U_A y U_B forman una disconexión para D, lo cual no es posible pues D es conexo.

En consecuencia, $f(D)$ no es disconexo, es decir, $f(D)$ es conexo cuando D es conexo.

Lema.
Los únicos conjuntos conexos en $\mathbb{R}$ son los intervalos ($A \subseteq \mathbb{R}$ es conexo si y sólo si A es un intervalo)

Teorema. -Valor medio de Bolzano-
Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si D es conexo y compacto, y f es continua sobre D, entonces para todo $y \in [\min_{x \in D} f(x), \max_{x \in D} f(x)]$ existe $x_* \in D$, tal que $y = f(x)$.

Demostración
Puesto que D es conexo y compacto y f es continua sobre D, $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ es conexo y compacto. Así, como $f(D)$ debe ser un intervalo cerrado y acotado, se sigue que existe $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ tales que

$$f(D) = [a, b]$$

Por tanto, para $y \in f(D) = [a,b]$ existe $x \in D$ tal que

$$a = \min_{z \in D} f(z) \leq y = f(x) \leq \max_{z \in D} f(z) = b$$

Continuidad Uniforme.
Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Decimos que f es uniformemente continua en D cuando.

Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in D, \ \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

En particular, cuando $y \in D$ arbitrario pero fijo, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in D, \ \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

Así, notemos que

Continuidad uniforme
$\Rightarrow$ Continuidad global
$\Rightarrow$ Continuidad puntual

Ejemplos.

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = -3x + 5$$

¿Es f uniformemente continua en $\mathbb{R}$?

Sean $x, y \in \mathbb{R}$, cualquiera. Tenemos

$$|f(x) - f(y)| = 3|x - y|$$

Sea $\varepsilon > 0$, cualquiera. Tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$ vemos que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, hemos probado que f es uniformemente continua (u.c.) en $\mathbb{R}$.

2) Consideremos

$$f: (0,1) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x^2$$

Vemos que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x^2 - y^2| \\ &= |x + y||x - y| \\ &\leq (|x| + |y|)|x - y| \\ &\leq (1 + 1)|x - y| \\ &= 2|x - y| \qquad \forall x, y \in (0,1) \end{aligned}$$

Así, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, tal que

$$\forall x, y \in (0,1), \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

3) $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = x^2$$

Probemos que f nos es uniformemente continua.

Sea $\delta > 0$, cualquiera.

Tomemos

$$x = \frac{1}{\delta} \quad \text{y} \quad y = x + \frac{\delta}{2} \in (0, +\infty)$$

para los cuales

$$|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \left(\frac{1}{\delta}\right)^2 - \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 \right| \\ &= \left| \frac{1}{\delta^2} - \left(\frac{1}{\delta^2} + 2\frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{\delta} + \frac{\delta^2}{4} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\delta^2} - 1 - \frac{\delta^2}{4} \right| \\ &= \left| -1 - \frac{\delta^2}{4} \right| \\ &= \left| \frac{\delta^2}{4} + 1 \right| \\ &= \frac{\delta^2}{4} + 1 > 1 \end{aligned}$$

Materia Análisis Real
Tema Continuidad Uniforme.
Hoja 28 **de**

Así existe $\varepsilon=1>0$ tal que para todo $\delta>0$ existen $x:=\frac{1}{\delta}$ y $y=x+\frac{\delta}{2}\in(0,+\infty)$ tales que

$$|x-y|<\delta \quad y \quad |f(x)-f(y)|>\varepsilon$$

así, f no es uniformemente continua.

Teorema - Heine:

Sean $D\subseteq\mathbb{R}^n$ no vacío y $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Si D es compacto y f es continua sobre D, entonces f es u.c. en D.

Demostración

Sea $\varepsilon>0$ cualquiera. Puesto que f es continua en D, para cada $x\in D$ existe $\delta_x>0$ tal que

$$\forall y\in D \quad \|x-y\|<\delta_x \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|<\varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \forall y\in D\cap B_{\delta_x}(x) \Rightarrow f(y)\in B_{\varepsilon/2}(f(x))$$

Notamos que

$$\bigcup_{x\in D} B_{\delta_x/2}(x)$$

al menos el centro es elemento

así

$$\mathcal{U}:=\{B_{\frac{\delta_x}{2}}(x) : x\in D\}$$

es un recubrimiento abierto de D. Como D es compacto, existen $x_1,x_2,\dots,x_k\in D$ tales que

$$D\subseteq\bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{\delta_{x_i}}{2}}(x_i)$$

Tomemos
$$\delta:=\min\left\{\frac{\delta_{x_1}}{2},\frac{\delta_{x_2}}{2},\dots,\frac{\delta_{x_k}}{2}\right\} = \min_{i=1,\dots,k}\frac{\delta_{x_i}}{2}>0.$$

Así, si $x,y\in D$ son tales que $\|x-y\|<\delta$, entonces existe $i=1,\dots,P$ tal que $x\in B_{\frac{\delta_{x_i}}{2}}(x_i)$ y así

$$\begin{aligned}\|y-x_i\| &\le \|y-x\|+\|x-x_i\| \\ &\le \delta+\frac{\delta_{x_i}}{2} \\ &\le \frac{\delta_{x_i}}{2}+\frac{\delta_{x_i}}{2} \\ &= \delta_{x_i}\end{aligned}$$

por tanto $y\in B_{\delta_{x_i}}(x_i)$

Así, para cada $x,y\in D$ tales que $\|x-y\|<\delta$, existe $i=1,\dots,k$ tal que

$$x,\ y\in B_{\delta_{x_i}}(x_i)$$

(pues $x\in B_{\frac{\delta_{x_i}}{2}}(x_i)\subseteq B_{\delta_{x_i}}(x_i)$)

Como f es continua

$$f(x),f(y)\in B_{\varepsilon/2}(f(x_i))$$

Por tanto,

$$\|f(x)-f(x_i)\|<\varepsilon/2$$

y

$$\|f(y)-f(x_i)\|<\varepsilon/2$$

así

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\| &\le \|f(x)-f(x_i)\|+\|f(x_i)-f(y)\| \\ &\le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

En resumen, existe $\delta>0$ tal que

$\forall x,y\in D$, $\|x-y\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|<\varepsilon$

Como ε es arbitrario, la última desigualdad muestra que f es uniformemente continua □

Sucesiones de funciones.

Sean $D\subseteq\mathbb{R}^n$ no vacío y $f_k:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $k\in\mathbb{N}$. Decimos que el arreglo

$$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}=(f_1,f_2,\dots)$$

es una sucesión de funciones con dominio D e imágen en $\mathbb{R}^m$. Notemos que para cada $x\in D$, se obtiene una sucesión

$$(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}^m$$

la cual puede ser convergente o no, dependiendo de x.

Definición: Sean $D\subseteq\mathbb{R}^n$ no vacío, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones con dominio D y rango en $\mathbb{R}^m$. Decimos que la sucesión $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ cuando para cada $x\in D$ se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)$$

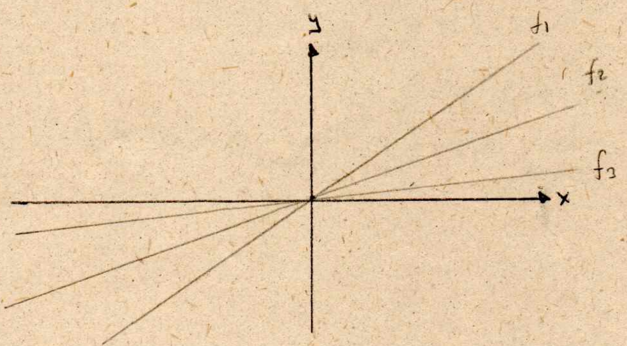
Decimos que f es el límite de $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y escribimos

$$f=\lim_{k\to\infty} f_k$$

Ejemplos

1) Para cada $k\in\mathbb{N}$

$$f_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto f_k(x)=\frac{x}{k}$$



Sea $x \in \mathbb{R}$, cualquiera.

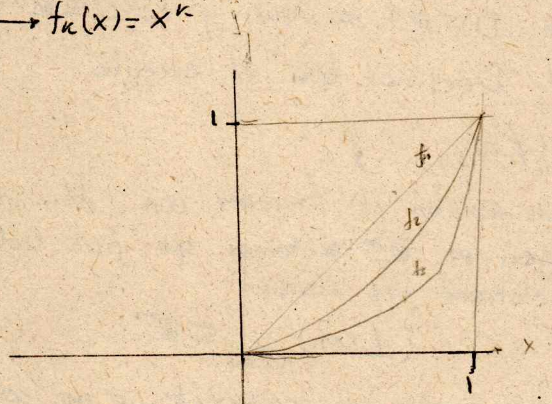
Calculamos
$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{x}{k} = x \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$$

Así,
$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definimos
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 0 = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \end{aligned}$$

Así f es el límite de la sucesión $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Notemos que cada f_k es continua (uniformemente continua) sobre $\mathbb{R}$, al igual que f.

2. $k \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned} f_k: [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_k(x) = x^k \end{aligned}$$



Sea $x \in [0,1]$, cualquiera.

Calculamos
$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} x^k = \begin{cases} \lim_{k\to\infty} 1^k \\ \lim_{k\to\infty} x^k, & x \in [0,1) \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{cuando } x = 1 \\ 0 & \text{cuando } 0 \le x < 1 \end{cases}$$

Definimos
$$\begin{aligned} f: [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } x = 1 \\ 0 & \text{cuando } x \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Así, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a f. En este caso cada f_k es uniformemente continua, pero f no es continua en 1. En efecto, notemos que
$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1]$$
convergente a 1, pero
$$\lim_{k\to\infty} f\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0 \neq f(1)$$

3. Para cada $k \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} f_k: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_k(x) = \frac{x^2 + kx}{k} \end{aligned}$$

Sea $x \in \mathbb{R}$, cualquiera

Calculamos
$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{x^2 + kx}{k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{x^2}{k} + x\right) = x.$$

Definimos
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x \end{aligned}$$
es el límite de la sucesión $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$

4. Para cada $k \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} f_k: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_k(x) = \frac{1}{k} \operatorname{sen}(kx + k) \end{aligned}$$

Sea $x \in \mathbb{R}$, cualquiera.

Al parecer
$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$$

Como $(\operatorname{sen}(k(x+1)))_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada y $(1/k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente a 0, sabemos que
$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sen}(kx + k) = 0$$

Así,
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 0 \end{aligned}$$
es el límite de la sucesión $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Lema.
Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones con dominio D e imagen en $\mathbb{R}^m$, y $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. La sucesión $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a f si y sólo si para cada $x \in D$ para cada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que
$$\| f_k(x) - f(x) \| < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0.$$

Ejercicio

Ejemplo:

1) $k \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} f_k: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_k(x) = \frac{1}{k} \operatorname{sen}(kx + k) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 0 \end{aligned}$$

Sea $x \in \mathbb{R}$, cualquiera

Sea $\varepsilon > 0$, cualquiera.

Tenemos que
$$\begin{aligned} &| f_k(x) - f(x) | \\ &= \left| \frac{1}{k} \operatorname{sen}(kx + k) \right| \\ &\le \frac{1}{k} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad (1) \end{aligned}$$

Materia Análisis Real

Tema Series de Funciones

Hoja 29 de

Por la propiedad arquimediana entre 1 y ε, sabemos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 < k_0 \varepsilon \qquad (1)$$

Así,

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k_0} < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0 \qquad (2)$$

Usando (1) y (2), para nuestro $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ (que depende sólo de ε) tal que

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0$$

2. $k \in \mathbb{N}$

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f_k(x) = \frac{x^2 + kx}{k}$$
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x$$

$$\lim_{k \to \infty} f_k = f$$

Sea $x \in \mathbb{R}$, cualquiera.

Sea $\varepsilon > 0$, cualquiera. Tenemos que

$$\left| \frac{x^2 + kx}{k} - x \right| = \left| \frac{x^2 - kx - xk}{k} \right| \qquad (1)$$
$$= \left| \frac{x^2}{k} \right| = \frac{x^2}{k}$$

Por la propiedad arquimediana entre ε y x^2, sabemos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x^2 < k_0 \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{k_0} < \varepsilon$$

Por tanto

$$\frac{x^2}{k} \leq \frac{x^2}{k_0} < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0$$

Así, para nuestro $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ε y de x) tal que

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall k > k_0$$

Definición

Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones con dominio D e imagen en $\mathbb{R}^m$ y $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Decimos que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en D cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0 \qquad \forall x \in D.$$

(k_0 sólo depende del ε)

Nota.

Para $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones con dominio $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e imagen en $\mathbb{R}^m$, y $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

f converge uniformemente

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon)(\forall x \in D)(\forall k \geq k_0)$$

f No converge uniformemente cuando

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall k_0 \in \mathbb{N})(\exists k \geq k_0)(\exists x \in D)(\|f_k(x) - f(x)\| \geq \varepsilon)$$

Así, para probar que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ no converge uniformemente a f, basta con hallar una subsucesión de $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y una sucesión de puntos $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq D$ tales que $\|f_k(x_k) - f(x_k)\| \geq \varepsilon$ $\forall k \in \mathbb{N}$ para algún $\varepsilon > 0$

Ejemplo

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f_k(x) = \frac{x}{k} \qquad\qquad x \mapsto f(x) = 0$$

$(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ no es uniformemente convergente

Tomemos $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} = (k)_{k \in \mathbb{N}}$. Vemos que

$$|f_k(x_k) - f(x_k)| = \left|\frac{k}{k} - 0\right| = 1 \geq 1$$

$$f_k : K \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad K \text{ compacto}$$
$$f : K \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$
$$f = \lim_{k \to \infty} f_k \quad \text{uniformemente}$$

$\forall \varepsilon > 0$, $(\exists k_0)$ $(\forall \varepsilon 0))$ $(\forall \varepsilon > 0)$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0$$
$$\forall k \in \mathbb{K}$$

Como $f(K)$ es compacto, es cerrado y acotado.

Así

$$\sup_{x \in K} \|f_k(x) - f(x)\|$$

$$\sup_{x \in K} \|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

$$\|f_k(x) - f(x)\| \leq \|f_k(x)\| + \|f(x)\|$$
$$\leq M_k + M_y \qquad \forall x \in D_n$$

$$C([a,b]), \ \|\cdot\|_\infty : C([a,b]) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Miércoles 5 de Febrero de 2020.

La norma uniforme

Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Decimos que f es acotada cuando existe $M > 0$ tal que

$$\|f(x)\| \leq M \qquad \forall x \in D,$$

ie,

$$\{\|f(x)\| : x \in D\} \subseteq \mathbb{R},$$

es acotado. En este contexto, existe la cantidad

$$0 \leq \|f\|_D := \sup\{\|f(x)\| : x \in D\} = \sup_{x \in D} \|f(x)\|$$

Dado $D \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, consideremos

$$\{f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : f \text{ es acotado}\} =: B_{nm}(D)$$

es un espacio vectorial real con las operaciones de suma y producto por escalar usuales de las funciones.

$$\|\cdot\|_D : B_{nm}(D) \to \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto \|f\|_D = \sup_{x \in D} \|f(x)\|$$

define una norma sobre $B_{nm}(D)$.

- $\|\cdot\|_D$ define una norma

1) $\|\cdot\|_D \geq 0 \quad \forall f \in B_{nm}(D)$.

Notemos que

$$\|\cdot\|_D = \sup_{x \in D} \|f(x)\|$$

de donde, como $\|f(x)\| \geq 0$ para todo $x \in D$, entonces $\sup_{x \in D} \|f(x)\| \geq 0$. Así

$$\|\cdot\|_D \geq 0 \qquad \forall f \in B_{nm}(D)$$

2) PD. $\|\alpha f(x)\| = |\alpha| \|f(x)\|$

Sean $f \in B_{nm}(D)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, cualesquiera. Tenemos que

$$\|\alpha f(x)\|_D = \sup_{x \in D} \|\alpha f(x)\|$$
$$= \sup_{x \in D} |\alpha| \|f(x)\|$$
$$= |\alpha| \sup_{x \in D} \|f(x)\|$$
$$= |\alpha| \|f(x)\|_D$$

Así, hemos probado que

$$\|\alpha f(x)\| = |\alpha| \|f(x)\|_D$$

3) PD $\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\|$

Sean $f, g \in B_{nm}(D)$ cualesquiera. Notemos que

$$\|f(x) + g(x)\|_D = \sup_{x \in D} \|f(x) + g(x)\|$$
$$\leq \sup_{x \in D} (\|f(x)\| + \|g(x)\|)$$
$$= \sup_{x \in D} \|f(x)\| + \sup_{x \in D} \|g(x)\|$$
$$= \|f(x)\|_D + \|g(x)\|_D$$

4) $\|f(x)\|_D = 0$ si y solo si $f(x) = 0$

$\Rightarrow$ Sea $f \in B_{nm}(D)$, cualquiera.

Supongamos que $\|f(x)\|_D = 0$, esto es equivalente a

$$\sup_{x \in D} \|f(x)\| = 0$$

pero

$$\sup_{x \in D} \|f(x)\| \geq \|f(x)\| \geq 0$$

de donde, por hipótesis, se sigue que

$$\|f(x)\| = 0 \qquad \forall x \in D$$

y, por lo tanto

$$f(x) = 0 \qquad \forall \in D$$

es decir, f es la función nula.

$\Leftarrow$ Supongamos que $f(x) = 0$. Notemos que

$$\|f(x)\|_D = \|0\|_D,$$

de donde

$$\|0\|_D = \sup_{x \in D} \|0\|$$
$$= \sup_{x \in D} \{0\}$$
$$= \max \{0\}$$
$$= 0$$

Así, se concluye que

$$\|f\|_D = 0$$

si y solo si f es la función nula

$$\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \qquad \forall x \in D$$
$$\leq \sup_{x \in D} \|f(x)\| + \sup_{x \in D} \|g(x)\|$$
$$= \|f\|_D + \|g\|_D$$

Así, $\|f\|_D$ y $\|g\|_D$ es una cota superior de

$$\{\|f(x) + g(x)\| \;\; x \in D\},$$

por tanto

$$\|f + g\|_D = \sup\{\|f(x) + g(x)\| : x \in D\} \leq \|f\|_D + \|g\|_D$$

Llamamos a $\|\cdot\|_D$ la norma uniforme sobre $B_{n,m}(D)$.

Una sucesión de puntos en $B_{nm}(D)$ es una función

$$f : \mathbb{N} \to B_{nm}(D)$$
$$k \longmapsto f(k) =: f_k$$

escribimos $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a esta sucesión.

Decimos que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B_{nm}(D)$ converge a $F \in B_{nm}$ $F \in B(D)$ cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_k - F\|_D < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0$$

Escribimos

$$F = \lim_{k \to \infty} f_k.$$

Materia Análisis Real
Tema Sucesiones de funciones
Hoja 30 de

Notemos que

$$F = \lim_{k\to\infty} f_k \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \| f_k - F \| = 0$$

Nota. Supongamos que

$$(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq B_{nm}(D)$$

y

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

tal que

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = F(x) \qquad \forall x \in D$$

($(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a f)

¿ $f \in B_{nm}(D)$?

Sea $k\in\mathbb{N}$, cualquiera. Como $f_k : D\subseteq\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es acotada, existe $M_k>0$ tal que

$$\| f_k(x) \| \leq M_k \qquad \forall x\in D$$

Teorema:

Sean $D\subseteq\mathbb{R}^n$ no vacío, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq B_{nm}(D)$ y $f : D\subseteq\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ acotada. Se tiene que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f si y sólo si

$$\lim_{k\to\infty} \| f_k - f \| = 0.$$

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $\varepsilon>0$, cualquiera. Sea $0<\varepsilon_1<\varepsilon$ cualquiera. De nuestra hipótesis, existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\| f_k(x) - f(x) \| < \varepsilon_1 \qquad \forall k\geq k_0,\ \forall x\in D.$$

Así, ε_1 es una cota superior para el conjunto

$$\{ \| f_k(x) - f(x) \| : x\in D \}$$

para cada $k\geq k_0$. Por tanto

$$\| f_k - f \|_D = \sup_{x\in D} \| f_k(x) - f(x) \| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon \qquad \forall k\geq k_0$$

$$\Rightarrow \| f_k - f_0 \| < \varepsilon \qquad \forall k\geq k_0$$

Como ε es arbitrario, se sigue que

$$\lim_{k\to\infty} \| f_k - f_0 \|_D = 0$$

$\Leftarrow$ Tomemos $\varepsilon>0$, cualquiera. Por la hipótesis, existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\| f_k(x) - f(x) \| \leq \| f_k - f \|_D < \varepsilon \qquad \forall k\geq k_0 \quad \forall x\in D.$$

$$\Rightarrow \| f_k(x) - f(x) \| < \varepsilon \qquad \forall k\geq k_0,\ \forall x\in D.$$

Como ε es arbitrario, se sigue que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.

Ejemplos:

$k\in\mathbb{N}$

$$f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f_k(x) = \frac{x}{k}.$$

Para cada $k\in\mathbb{N}$

$$| f_k(x) | = \left| \frac{x}{k} \right| = \frac{x}{k} \leq 1. \qquad \forall x\in[0,1]$$

lo que muestra que

$$f_k \in B_{11}([0,1])$$

para cada $k\in\mathbb{N}$. $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = 0, \qquad f\in B_{11}([0,1])$$

¿Es la convergencia uniforme? Sí

Calculamos

$$\| f_k - f \|_{[0,1]}$$
$$= \sup \{ \| f_k(x) - f(x) \| : x\in[0,1] \}$$
$$= \sup \left\{ \left| \frac{x}{k} - 0 \right| : x\in[0,1] \right\}$$
$$= \sup \left\{ \frac{x}{k}, x\in[0,1] \right\}$$
$$= \frac{1}{k}$$

pues

$$0 \leq \frac{x}{k} \leq \frac{1}{k} \qquad \forall x\in[0,1]$$

y

$$\frac{1}{k} \in \left\{ \frac{x}{k} : x\in[0,1] \right\}.$$

Así,

$$\lim_{k\to\infty} \| f_k - f \| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$$

2) $k\in\mathbb{N}$

$$f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x^k$$

$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } x\in[0,1) \\ 1 & \text{cuando } x=1 \end{cases}$$

Sea $k\in\mathbb{N}$, cualquiera.

$$0 \leq x^k \leq 1 \qquad \forall x\in[0,1]$$
$$\Rightarrow 0 \leq f(x) = x^k \leq 1$$
$$0 \leq | f_k(x) | = f_k(x) = x^k \leq 1$$

lo que indica que f_k es acotada. Así, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq B_{11}([0,1])$, f también pertenece a $B_{11}([0,1])$.

¿Es esta convergencia uniforme?

para cada $k \in \mathbb{N}$, calculamos $\| f_k - f \|_{[0,1]}$

$= \sup \{ |f_k(x) - f(x)| : x \in [0,1] \}$

Tenemos

$$|f_k(x) - f(x)| = \begin{cases} |x_k - 0| & \text{si } x \in [0,1) \\ |x_k - 1| & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x_k & \text{si } x \in [0,1) \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Así,

$\| f_k - f \|_D = 1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$

por tanto

$\lim_{k \to \infty} \| f_k - f \|_D = 1$

No es convergente uniformemente

Teorema. Criterio de Cauchy.

Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B_{\mathbb{R}^m}(D)$. La sucesión $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es uniformemente convergente si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| f_k - f_j \| < \varepsilon \qquad \forall k,j \in k_0$$

Nota: En $(B_{\mathbb{R}^m}(D), \| \cdot \|_D)$, toda sucesión de Cauchy es convergente. Así, decimos que $(B_{\mathbb{R}^m}(D), \| \cdot \|_D)$ es completo.

Demostración

$\Rightarrow$) Supongamos que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B_{\mathbb{R}^m}(D)$ es uniformemente convergente a $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, i.e.,

$$\lim_{k \to \infty} \| f_k - f \|_D = 0. \qquad (1)$$

Sea $\varepsilon > 0$, cualquiera. Por (1), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| f_k - f \| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k \geq k_0$$

así

$$\| f_j - f \| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall j \geq k_0$$

Por tanto,

$$\| f_k - f_j \| \leq \| f_k - f \|_D + \| f_j - f \|_D$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$= \varepsilon \qquad \forall k,j \geq k_0 \quad (2)$$

Como ε es arbitrario, se sigue que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

$\Leftarrow$) Supongamos que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

P.D. $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es uniformemente convergente.

Sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| f_k - f_j \|_D < \varepsilon \qquad \forall k,j \geq k_0$$

$$\Rightarrow \| f_k(x) - f_j(x) \| \leq \| f_k - f_j \|_D < \varepsilon \qquad \forall k,j \geq k_0, \ \forall x \in D$$

por tanto, para cada $x \in D$, $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m$ es de Cauchy y por tanto convergente. ($\mathbb{R}^m$ es completo). Así

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

está bien definida

P.D. $\lim_{k \to \infty} \| f_k - f \|_D = 0$

Sea $\varepsilon > 0$, cualquiera.
Como $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| f_k(x) - f_j(x) \| < \varepsilon. \qquad \forall k,j \geq k_0, \ \forall x \in D.$$

Sea $k_0 > 0$ arbitrario pero fijo. Así

$$\| f_k(x) - f_j(x) \| < \varepsilon \qquad \forall j \geq k_0, \ \forall x \in D$$

$$\Rightarrow \lim_{j \to \infty} \| f_k(x) - f_j(x) \| < \lim_{j \to \infty} \varepsilon \qquad \forall x \in D$$

$$\Rightarrow \| f_k(x) - \lim_{j \to \infty} f_j(x) \|$$

$$\Rightarrow \| f_k(x) - f(x) \| < \varepsilon$$

Como $k \geq k_0$ es arbitrario, se sigue que

$$\| f_k(x) - f(x) \| < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0, \ \forall x \in D$$

$\forall k \geq k_0$

$$\Rightarrow \sup_{x \in D} \| f_k(x) - f(x) \| < \varepsilon$$

$$= \| f_k(x) - f(x) \|_D$$

Como ε es arbitrario, hemos probado que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.

Teorema.

Sean $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones con dominio $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e imágen $\mathbb{R}^m$ y

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Si cada f_k es continua sobre D y $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f, entonces f es continua sobre D.

Sea $a \in D$, cualquiera.

P.D. f es continua en a.

Sea $\varepsilon > 0$, cualquiera. Como f_k converge uniformemente a f, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| f_k(x) - f(x) \| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall k \geq k_0 \ \forall x \in D.$$

En particular

$$\| f_{k_0}(x) - f(x) \| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in D.$$

Materia Análisis Real
Tema Sucesiones de funciones
Hoja 31 de

Por la desigualdad triangular

$\| f(x) - f(a) \|$

$\leq \| f_{k_0}(x) - f(x) \| + \| f_{k_0}(a) - f(a) \| + \| f_{k_0}(x) - f_{k_0}(a) \|$

$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \| f_{k_0}(x) - f_{k_0}(a) \|$ (2)

Como f_{k_0} es continua en a, existe $\delta > 0$, tal que

$\forall x \in D, \quad \|x - a\| < \delta \Rightarrow \| f_{k_0}(x) - f_{k_0}(a) \| < \varepsilon$ (3)

Combinando (2) y (3), para $\varepsilon > 0$, existe $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$. tal que

$$\forall x \in D \quad \|x - a\| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(a) \| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \| f(x) - f(a) \| < \varepsilon$$

Como ε es arbitrario, hemos probado que f es continua en a. Como a también es arbitrario, se sigue que f es continua sobre D. $\square$

Ejercicio

Sean $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B_{nm}(D)$ y $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tal que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.

Se tiene que f es acotada. $f \in B_{nm}(D)$

Miércoles, 13 de Febrero de 2020.

Normas de $\mathbb{R}^n$

Sea $\| \cdot \|_* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, una norma sobre $\mathbb{R}^n$.

Denotemos por $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Sabemos que $e_k \neq 0$, para todo $k = 1, \dots, n$.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$, cualquiera, con $x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$.

Recordemos que

$$x = \sum_{k=1}^{n} x^k e_k.$$

Para la demostración se requiere la base canónica

Así, por la desigualdad triangular, y la desigualdad de Cauchy - Schwarz.

$$\|x\|_* = \left\| \sum_{k=1}^{n} x^k e_k \right\|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |x^k| \, \|e_k\|_*$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|^2 \right)^{1/2}$$

$$= \alpha \|x\|_2,$$

con $\alpha := \left(\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|_*^2 \right)^{1/2} > 0$

En resumen, existe $\alpha > 0$ tal que

$$(*) \quad \|x\|_* \leq \alpha \|x\|_2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ahora, notemos que

$$\big| \|x\|_* - \|y\|_* \big| \leq \|x - y\|_* \leq \alpha \|x - y\|_2$$

para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Se tiene que $\| \cdot \|_* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua sobre $\mathbb{R}^n$.

En efecto, sea $a \in \mathbb{R}^n$, cualquiera.

Sea $\varepsilon > 0$, cualquiera.

P.D. Existe $\delta > 0$ tal que

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x - a\| < \delta \Rightarrow \big| \|x\|_* - \|a\|_* \big| < \varepsilon.$

Tomando $\delta := \frac{\varepsilon}{\alpha}$, por (1) se sigue que

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x - a\|_2 < \delta \Rightarrow \big| \|x\|_* - \|a\|_* \big| < \varepsilon.$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, el enunciado anterior, prueba que $\| \cdot \|_*$ es continua en a. Como $a \in \mathbb{R}^n$ es arbitrario, $\| \cdot \|_*$ es continua en $\mathbb{R}^n$.

También sabemos que la esfera

$$S_1(0) : \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1 \}$$

es cerrado y acotado, por tanto, del teorema de Heine-Borel, es compacto.

De este modo

$$\| S_1(0) \|_* = \{ \|x\|_* : x \in S_1(0) \}$$

es compacto.

Así, existe

$$c := \min_{x \in S_1(0)} \|x\|_* > 0$$

De aquí, tenemos que

$$c \leq \|x\|_* \qquad \forall x \in S_1(0)$$

$$c \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_* \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

$$\Rightarrow c \|x\|_2 \leq \|x\|_* \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Cuando $x = 0$, $\|x_2\| = \|x\|_* = 0$, así

$$\|x\|_2 \, c \leq \|x\|_* \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow \quad \|x\|_2 \leq \frac{1}{c} \|x\|_* \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Resumiendo, existen $\alpha, c > 0$ tal que

$$\begin{cases} \|x\|_* \leq \alpha \|x\|_2 & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_2 c \leq \|x\|_* & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad c \|x\|_2 \leq \|x\|_* \leq \alpha \|x\|_2$$

$$\frac{1}{\alpha}\|x\|_* \leq \|x\|_2 \leq \frac{1}{c}\|x\|_*$$

Teorema. Dadas

$\|x\|_* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y

$\|x\|' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

normas sobre $\mathbb{R}^n$, existen $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1\|x\|_* \leq \|x\|' \leq c_2\|x\|_* \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$\frac{1}{c_2}\|x\|' \leq \|x\|_* \leq \frac{1}{c_1}\|x\|'$$

Decimos que todas las normas sobre $\mathbb{R}^n$, son equivalentes.

Demostración

Sobre el conjunto de normas de $\mathbb{R}^n$, (1) define una relación de equivalencia.

Basta comprobar que si $\|x\|_* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una norma en $\mathbb{R}^n$, entonces existen $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1\|x\|_* \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_* \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

lo cual conocemos es cierto.

Ejemplo

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, no vacío, cualquiera. Sea $a \in A$, punto interior de A, i.e., existe $r > 0$ tal que

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_2 < r\} \subseteq A$$

Vamos a demostrar que existe $r_* > 0$ tal que

$$B_{r_*}(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_* < r_*\} \subseteq A, \quad \text{con}$$

$\|x\|_* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cualquier norma sobre $\mathbb{R}^n$.

Como $\|x\|_2$ y $\|x\|_*$ son equivalentes, existen $c_1, c_2 > 0$, tales que

$$c_1\|x\|_* \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_* \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Así,

$$c_1\|x - a\|_* \leq \|x - a\|_2 \leq r_*$$

tomando $r_* := \frac{r}{c_2} > 0$

$$\forall x \in B^{\|\cdot\|_*}_{r_*}(a) \Rightarrow x \in B_r(a)$$

$$\Rightarrow B^{\|\cdot\|_*}_{r_*} \subseteq B_r(a) \subseteq A.$$

Así, si $a \in \operatorname{int}(A)$ (con $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$), entonces a es un punto interior de A en $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_*)$.

En cambio si a es un punto interior de A, en $(\mathbb{R}^n, \|x\|_*)$, entonces $a \in \operatorname{int}(A)$ (en $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$)

Ejemplo.

Sea $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ una sucesión de puntos converg[ente] en $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

¿Es $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergente en $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_*)$?

Sabemos que existe $a \in \mathbb{R}^n$ tal que para cad[a] $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_k - a\|_2 < \varepsilon.$$

Sabemos que existe $C > 0$ tal que

$$\|y\|_* \leq C\|y\|_2 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Sea $\varepsilon > 0$, cualquiera. Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_k - a\| < \frac{\varepsilon}{C} \qquad \forall k \geq k_0$$

$$\Rightarrow \|x_k - a\|_* \leq C\|x_k - a\|_2 < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0$$

Como ε es arbitrario, se sigue que

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k - a\| = 0$$

es decir

$$a := \lim_{k\to\infty} x_k, \quad \text{en } (\mathbb{R}^n, \|x\|_*)$$

FIN :)